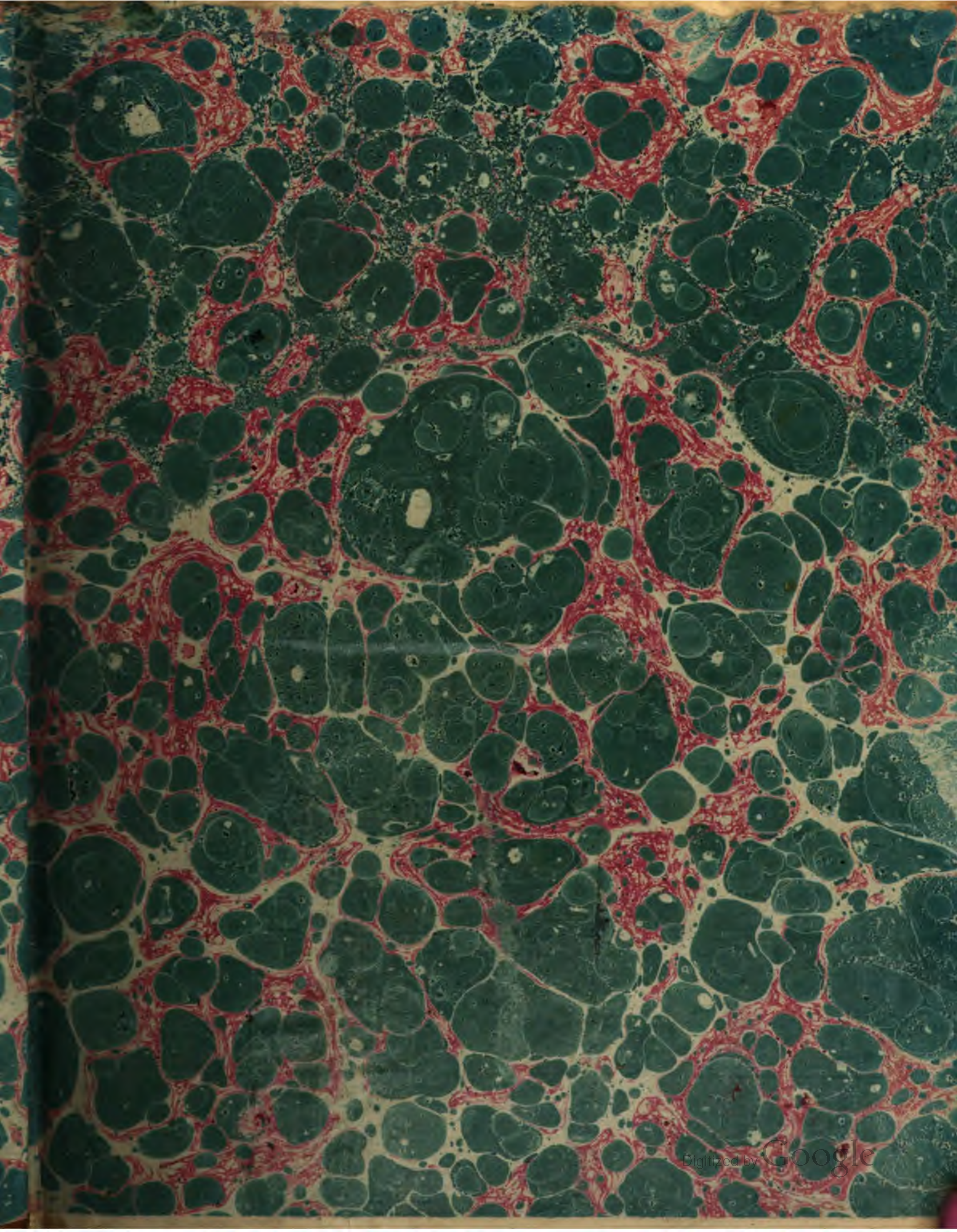


ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue du St-Sacrement, maison *Fouquet*, à Montpellier, [Hérault];

Chez madame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire pour les mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier de St-André-des-Arcs, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et ouvrages à annoncer doivent être adressés, francs de port, au *Bureau des Annales*.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins, pour six mois; et le prix de chacun des dix premiers volumes est inférieur de 3 fr. à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	100.
	II.		216.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur d'astronomie, doyen de la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME DIXIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier St-André-des-Arcs.

1819 ET 1820.

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai d'une méthode générale, servant à intégrer, avec une approximation illimitée, toute équation différentielle à deux variables;

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

DANS plusieurs précédens mémoires (*), nous avons enseigné à construire des formules à l'aide desquelles on peut intégrer, entre deux limites données et avec tout le degré d'approximation qu'on peut désirer, toute fonction différentielle d'une seule variable:

(*) Voyez, tom. VI, pag. 281 et 372; tom. VII, pag. 241; tom. IX, pag. 345.



nous nous proposons de montrer ici comment, en suivant l'esprit de la même methode, on peut parvenir à intégrer, avec le même degré d'approximation, toute équation différentielle d'ordre et de degré quelconque, entre deux variables x, y Ce sujet semble devoir mériter d'autant plus d'intérêt que notre indigence, relativement à cette branche d'analise, n'est malheureusement que trop bien connue; que les équations généralement integrables se réduisent à un très-petit nombre de classes; et qu'encore leurs intégrales ne sont, pour la plupart, que des équations compliquées et transcendantes, dont on ne saurait, le plus souvent, tirer aucun parti, pour obtenir la valeur de l'une des variables en fonction de l'autre.

Soit une équation différentielle quelconque, représentée généralement par

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{dx^n}\right)=0\,; \qquad (1)$$

si son intégrale pouvait être obtenue, et si cette intégrale était résoluble par rapport à y, on en tirerait, pour cette variable, une expression de cette forme

$$y=f(x, C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_n), \qquad (2)$$

laquelle, après avoir déterminé les constantes C_1, C_2, C_3, ... C_n, par n conditions distinctes, prendrait cette nouvelle forme

$$y=\varphi(x)\,; \qquad (3)$$

et alors seulement il deviendrait possible d'assigner, soit exactement, soit par approximation, la valeur b de y, répondant à une valeur quelconque a attribuée à x; cette valeur serait, en effet,

$$b=\varphi(a)\,. \qquad (4)$$

L'objet que nous nous proposons ici est de parvenir à cette valeur b de y, sans passer par le double intermédiaire de l'intégration de l'equation (1) et de la résolution de son integrale par rapport à y.

Observons d'abord, avant d'entrer en matière, que ce que nous dirons ici du cas où c'est y que l'on veut obtenir en fonction de x doit s'entendre également du cas où ce serait au contraire x qu'il s'agirait de déterminer en fonction de y; attendu que, par des formules connues, on peut, dans l'équation (1), changer l'hypothèse relative à la variable indépendante, et traiter ensuite x par rapport à y, dans l'équation résultante, comme nous allons traiter, dans celle-ci, y par rapport à x.

Ces choses ainsi entendues, considérons l'équation (3); cette équation exprime une certaine courbe, dont l'ordonnée b, répondant à l'abscisse donnée a, est l'inconnue de notre problème. Considérons sur cette courbe un arc très-petit coupé à peu près à son milieu par l'ordonnée b. Plus cet arc sera petit, et plus il deviendra permis de le considérer comme se confondant sensiblement avec l'arc d'une certaine courbe parabolique ayant une équation de la forme

$$y=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots+Rx^m\,; \qquad (5)$$

et même, si la courbe (3) était connue, rien ne serait plus facile que d'assigner les valeurs des coefficiens A, B, C, ... R, propres à satisfaire à cette condition; on voit d'ailleurs que, plus le nombre arbitraire m ou le nombre $m+1$ des coefficiens serait considérable, et plus aussi les deux courbes approcheraient de coïncider exactement à une petite distance de part et d'autre de l'ordonnée b. Alors donc, en faisant $x=a$, dans l'équation (5), la valeur qui en résulterait pour y pourrait être sensiblement prise pour l'ordonnée cherchée b.

Voyons donc si nous ne pourrions pas parvenir à déterminer les coefficiens de l'équation (5). D'abord, ces coefficiens doivent être

tels que les conditions relatives à la détermination des constantes se trouvent satisfaites ; ce qui établira déjà entre eux un nombre n de relations. Il ne s'agira donc plus que d'en trouver $m-n+1$ autres.

De l'équation (5) on tire

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+mRx^{m-1}\,, \\ \frac{d^2y}{dx^2}=2C+6Dx+12Ex^2+\ldots\ldots\ldots+m(m-1)Rx^{m-2}\,, \\ \frac{d^3y}{dx^3}=6D+24Ex+60Fx^2+\ldots\ldots+m(m-1)(m-2)Rx^{m-3}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (6)$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\psi(x\,,\,A\,,\,B\,,\,C\,\ldots\ldots\,R)=0\,. \qquad (7)$$

Or, il est clair, par ce qui précède, que, si les coefficiens inconnus A, B, C, ... R, avaient été convenablement déterminés, cette dernière équation serait identique, ou du moins à très-peu près, pour toutes les valeurs de x, peu différentes de la valeur a; en exprimant donc qu'elle devient telle, en effet, pour de pareilles valeurs, au nombre de $m+n-1$, on se procurera, entre les coefficiens A, B, C, ... R, le nombre d'équations nécessaires pour compléter leur détermination.

Comme le nombre m est arbitraire, et assujetti seulement à n'être pas trop petit ; on pourra toujours le prendre tel que le nombre $m-n+1$ soit un nombre impair $2p+1$; alors, ce qu'il y aura de mieux à faire, sera de mettre successivement pour x dans (7) les nombres a, $a\pm z$, $a\pm 2z$, $a\pm 3z$, ... $a\pm pz$; z étant une fraction arbitraire, mais très-petite ; on conçoit en effet qu'en

considérant ainsi des points situés de part et d'autre de l'ordonnée b et très-rapprochés de cette ordonnée, on obtiendra un plus haut degré de précision.

On peut, au surplus, simplifier le procédé, en changeant d'abord dans l'équation proposée (1), x en $a+zx$; alors, il suffira de substituer les nombres 0, ± 1, ± 2, ..., $\pm p$, à la place de x, dans l'équation (7), et de chercher simplement la valeur A de y qui répond à $x=0$. Et, comme l'exactitude de cette valeur dépendra, en grande partie, de la petitesse de z; ce qu'il y aura de mieux à faire sera d'y supposer $z=0$. Il est entendu, au surplus, que, dans la recherche des conditions relatives à la détermination des constantes, il faudra également avoir égard au changement de x en $a+zx$.

Comme, dans le cas où l'équation (1) se trouverait d'un degré un peu élevé, l'équation (7), renfermant alors des puissances des coefficiens A, B, C, ... R, pourrait être incommode pour la détermination de ces coefficiens; on ferait bien de différentier une ou plusieurs fois l'équation (1), et de combiner ses différentielles tant entre elles qu'avec elle-même, de manière à obtenir l'équation la plus simple possible, laquelle serait alors substituée à cette équation (1). Il faudrait seulement, aux conditions déjà établies pour la détermination des constantes, en ajouter d'autres en nombre égal à l'excès de l'ordre de différentielle de la nouvelle équation sur l'ordre de l'équation (1).

Enfin, notre procédé pourra également être employé à résoudre, par approximation, les équations transcendantes à deux variables non résolubles immédiatement. Il ne faudra pour cela que les différentier un nombre de fois suffisant pour qu'on puisse, entre elles et leurs différentielles, éliminer toutes les transcendantes. Le résultat de l'élimination sera alors l'équation qu'il faudra prendre pour l'équation (1).

Il ne nous reste plus présentement qu'à appliquer notre procédé à des exemples; mais, afin de faire mieux apprécier les services

qu'on peut s'en promettre, nous choisirons de préférence des équations qu'on sache intégrer, et dont l'intégrale soit connue. En outre, afin qu'on puisse juger de l'influence du nombre des termes admis dans la valeur hypothétique de y sur l'exactitude de la formule finale, nous ferons croître ce nombre par degré, en le prenant d'abord fort petit, et en l'augmentant ensuite successivement.

PROBLÈME I. Un nombre étant donné, trouver son logarithme naturel ?

Solution. Soient x le nombre dont il s'agit, et y son logarithme cherché ; l'équation du problème sera

$$y=\text{Log}.x\ ,$$

ou, en différentiant,

$$x\frac{dy}{dx}=1\ ; \qquad (1)$$

et il s'agira de déterminer, au moyen de cette dernière équation, la valeur de y qui répond à une valeur quelconque a de x, en observant d'ailleurs que la constante que comporte son intégrale doit être déterminée par cette considération qu'à la valeur $x=1$ doit répondre la valeur $y=0$.

Changeons d'abord x en $a+zx$; cela changera dx en zdx ; et notre équation deviendra

$$(a+zx)\frac{dy}{dx}-z=0\ . \qquad (1)$$

où la constante devra être déterminée par cette considération qu'à $a+zx=1$ ou $x=\frac{1-a}{z}$ devra répondre $y=0$; et il s'agira simplement de déterminer, au moyen de cette dernière équation, la valeur de y qui répond à $x=0$.

Soit posé d'abord simplement

$$y=A+Bx\,, \qquad (5)$$

de manière que A soit le nombre cherché ou Log.a ; nous en déduirons

$$\frac{dy}{dx}=B\;; \qquad (6)$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$(a+zx)B-z=0\;; \qquad (7)$$

dans laquelle faisant la supposition unique $x=0$, nous aurons

$$aB-z=0\;;$$

la condition relative à la constante donnera ensuite

$$0=A+\frac{1-a}{z}B\;;$$

éliminant donc B, entre ces deux équations, il viendra

$$A=\frac{a-1}{a}\,,$$

résultat où z disparaît de lui-même ; changeant donc a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$\text{Log}.x=\frac{x-1}{x}\,.$$

Cette formule est exacte pour les logarithmes de *zéro* et de l'*unité*, et même pour les logarithmes de tous les nombres très-voisins de l'unité ; elle donne tous les autres beaucoup trop faibles, et d'autant trop faibles que les nombres sont plus grands ; ce qui s'aperçoit sur-le-champ, en remarquant qu'elle donne l'unité pour

le logarithme de l'infini, lequel, comme on sait, doit être lui-même infini.

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\,, \qquad (5')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2\,; \qquad (6')$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$(a+zx)(B+2Cx+3Dx^2)-z=0\;;$$

ou, en ordonnant par rapport à x,

$$(aB-z)+(Bz+2aC)x+(2Cz+3aD)x^2+3Dzx^3=0\,. \qquad (7')$$

En mettant successivement pour x, dans cette équation, les valeurs -1, 0, $+1$, on obtient

$$0=(aB-z)-(Bz+2aC)+(2Cz+3aD)-3Dz\,,$$

$$0=(aB-z)\,,$$

$$0=(aB-z)+(Bz+2aC)+(2Cz+3aD)+3Dz\,.$$

Prenant les différences consécutives de ces équations, nous obtiendrons ces deux-ci

$$0=(Bz+2aC)-(2Cz+3aD)+3Dz\,,$$

$$0=(Bz+2aC)+(2Cz+3aD)+3Dz\,.$$

Prenant la demi-différence de ces dernières, nous aurons

$$2Cz+3aD=0\;;$$

d'où,

d'où ; en remontant à celles qui précèdent, nous conclurons

$$Bz+2aC=-3Dz\ ;$$

$$-z+\ aB=\ \ 0\ .$$

Cela donne

$$B=+\frac{z}{a}\ ,\qquad C=-\frac{z^2}{2(a^2-z^2)}\ ;\qquad D=+\frac{z^3}{3a(a^2-z^2)}\ ;$$

mais la condition relative à la constante donne

$$A=\frac{a-1}{z}B-\frac{(a-1)^2}{z^2}C+\frac{(a-1)^3}{z^3}D\ ;$$

substituant donc les valeurs ci-dessus ; il viendra

$$A=\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2}{2(a^2-z^2)}+\frac{(a-1)^3}{3a(a^2-z^2)}\ ;$$

faisant enfin $z=0$ et changeant a en x, nous aurons

$$\text{Log.}x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}\ ;$$

formule plus exacte que la précédente ; mais, comme elle, seulement pour les valeurs de x peu différentes de l'unité.

Posons encore,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5\ ; \qquad (5'')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4\ ; \qquad (6'')$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$(a+zx)(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4)-z=0\ ;$$

ou, en développant, ordonnant par rapport à x, et posant, pour abréger,

$$aB-z=A', \quad 3Dz+4aE=D',$$

$$Bz+2aC=B', \quad 4Ez+5aF=E',$$

$$2Cz+3aD=C', \quad 5Fz=F';$$

$$o=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+F'x^5; \qquad (7'')$$

mettant successivement pour x, dans cette équation, les valeurs -2, -1, o, $+1$, $+2$, il viendra

$$o=A'-2B'+4C'-8D'+16E'-32F',$$

$$o=A'-\ B'+\ C'-\ D'+\ E'-\ F',$$

$$o=A',$$

$$o=A'+\ B'+\ C'+\ D'+\ E'+\ F',$$

$$o=A'+2B'+4C'+8D'+16E'+32F';$$

en prenant les différences consécutives, nous aurons

$$o=B'-3C'+7D'-15E'+31F',$$

$$o=B'-\ C'+\ D'-\ E'+\ F',$$

$$o=B'+\ C'+\ D'+\ E'+\ F';$$

$$o=B'+3C'+7D'+15E'+31F';$$

prenant la moitié des différences consécutives de celles-ci, nous aurons

$$0=C'-3D'+7E'-15F',$$

$$0=C'+E',$$

$$0=C'+3D'+7E'+15F',$$

prenant le tiers des différences consécutives de ces dernières, nous aurons

$$0=D'-2E'+5F',$$

$$0=D'+2E'+5F',$$

prenant enfin le quart de la différence de ces deux-ci, il viendra

$$E'=0;$$

d'où, en remontant

$$D'=-5F',$$

$$C'=0,$$

$$B'=+4F',$$

$$A'=0;$$

remettant pour ces lettres les quantités dont elles sont le symbole, nous aurons

$$4Ez+5aF=0,$$

$$3Dz+4aE=-25Fz;$$

$$2Cz+3aD=0,$$

$$Bz+2aC=+20Fz;$$

$$-z+aB=0;$$

d'où

$$B=+\frac{z}{a},$$

$$C=-\frac{z^2(a^2-5z^2)}{2(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

$$D=+\frac{z^3(a^2-5z^2)}{3a(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

$$E=-\frac{z^4}{4(a^4-5a^2z^2+4z^4)},$$

$$F=+\frac{z^5}{5a(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

mais, par la condition qui détermine la constante, on a

$$A=\frac{a-1}{z}B-\frac{(a-1)^2}{z^2}C+\frac{(a-1)^3}{z^3}D-\frac{(a-1)^4}{z^4}E+\frac{(a-1)^5}{z^5}F;$$

substituant donc, il viendra

$$A=\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2(a^2-5z^2)}{2(a^4-5a^2z^2+4z^4)}+\frac{(a-1)^3(a^2-5z^2)}{3a(a^4-5a^2z^2+4z^4)}$$

$$+\frac{(a-1)^4}{4(a^4-5a^2z^2+4z^4)}+\frac{(a-1)^5}{5a(a^4-5a^2z^2+4z^4)};$$

faisant enfin $z=0$, et changeant ensuite a en x, nous aurons

$$\text{Log}.x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\frac{(x-1)^5}{5x^5};$$

formule plus approchée encore que les précédentes; mais toujours pour des valeurs de x peu différentes de l'unité.

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour être conduit à soupçonner que, si on admettait une infinité de termes dans la valeur

hypothétique de y, auquel cas le procédé pourrait passer pour rigoureux, on aurait

$$\text{Log.}x=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{x}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x}\right)^5+\ldots;$$

or, cette valeur est en effet exacte; car si l'on y fait

$$\frac{x-1}{x}=-t \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{1}{1+t},$$

elle devient, en substituant et changeant les signes

$$\text{Log.}(1+t)=t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{3}t^3-\tfrac{1}{4}t^4+\tfrac{1}{5}t^5-\ldots\ldots$$

formule connue.

Ainsi, l'exemple que nous avons choisi, tout en justifiant complètement notre méthode, montre clairement, en outre, que cette méthode n'est point seulement un procédé approximatif, mais qu'elle peut même donner le développement général et rigoureux en série d'une fonction transcendante proposée.

PROBLÈME II. Trouver le nombre auquel répond un logarithme naturel proposé?

Solution. Cette question étant l'inverse de la précédente, il faudra, pour la résoudre, changer x en y et *vice versâ*, dans l'équation de la première, qui deviendra ainsi

$$y-\frac{dy}{dx}=0,$$

ou, en changeant x en $a+zx$,

$$zy-\frac{dy}{dx}=0, \qquad (1)$$

la constante devant ici être déterminée par la considération qu'à $y=1$ doit répondre $a+zx=0$ ou $x=-\frac{a}{z}$.

Posons d'abord simplement

$$y=A+Bx, \qquad (5)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B; \qquad (6)$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$z(A+Bx)-B=0,$$

ou

$$(Az-B)+Bzx=0; \qquad (7)$$

nous aurons ici à faire la seule supposition $x=0$, qui nous donnera

$$Az=B;$$

la condition qui doit déterminer la constante donnera, en outre,

$$1=A-B\frac{a}{z};$$

éliminant B entre ces deux équations, z disparaîtra de lui-même; et, en changeant ensuite a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$y=\frac{1}{1-x}.$$

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3, \qquad (5')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2 ; \qquad (6)$$

en substituant dans l'équation (1), elle deviendra,

$$z(A+Bx+Cx^2+Dx^3)-(B+2Cx+3Dx^2)=0 ;$$

ou, en ordonnant,

$$0=(Az-B)+(Bz-2C)x+(Cz-3D)x^2+Dzx^3 . \qquad (7)$$

Nous aurons seulement ici à faire pour x les suppositions -1, 0, $+1$, ce qui donnera

$$0=(Az-B)-(Bz-2C)+(Cz-3D)-Dz ,$$

$$0=(Az-B) ,$$

$$0=(Az-B)+(Bz-2C)+(Cz-3D)+Dz ;$$

prenant les différences consécutives, il viendra

$$0=(Bz-2C)-(Cz-3D)+Dz ,$$

$$0=(Bz-2C)+(Cz-3D)+Dz ;$$

en prenant la demi-différence de ces deux équations, il viendra

$$Cz-3D=0 ,$$

d'où, en remontant,

$$Bz-2C=-Dz ;$$

$$Az-B=0 ;$$

ce qui donnera

$$B=Az\,,\quad C=\frac{3z^2}{6-z^2}A\,,\quad D=\frac{z^3}{6-z^2}A\,;$$

mais, par la condition qui détermine la constante, on a

$$1=A-B\frac{a}{z}+C\frac{a^2}{z^2}-D\frac{a^3}{z^3}\,,$$

en substituant donc, il viendra

$$1=A\left\{1-a+\frac{3a^2}{6-z^2}-\frac{a^3}{6-z^2}\right\}\,;$$

faisant enfin $z=0$, et changeant a en x, il viendra, pour seconde approximation

$$e^x=\frac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}\,.$$

Posons encore

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5\,; \qquad (5'')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4\,, \qquad (6'')$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$z(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5)-(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4)=0\,;$$

ou en ordonnant et posant, pour abréger,

$$Az-B=A'\,,\qquad Dz-4E=D'\,,$$

$$Bz-2C=B'\,,\qquad Ez-5F=E'\,,$$

$$Cz-3D=C'\,,\qquad Fz=F'\,;$$

$0=A'$

$$0=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+F'x^5 \quad (7'')$$

En supposant successivement, dans cette dernière équation, $x=$; -2, -1, 0, $+1$, $+2$; on en tirera, comme dans le précédent problème;

$$\left.\begin{array}{l} A'=0, \\ B'=+4F', \\ C'=0, \\ D'=-5F', \\ E'=0. \end{array}\right\} \text{c'est-à-dire} \left\{\begin{array}{l} Az-B=0, \\ Bz-2C=+4Fz, \\ Cz-3D=0, \\ Dz-4E=-5Fz, \\ Ez-5F=0; \end{array}\right.$$

d'où

$$\frac{B}{z}=A,$$

$$\frac{C}{z^2}=\frac{15(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}A,$$

$$\frac{D}{z^3}=\frac{5(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}A,$$

$$\frac{E}{z^4}=\frac{5}{2(60-15z^2+2z^4)}A,$$

$$\frac{F}{z^5}=\frac{1}{2(60-15z^2+2z^4)}A;$$

la condition relative à la constante est d'ailleurs ici

$$1=A-\frac{B}{z}a+\frac{C}{z^2}a^2-\frac{D}{z^3}a^3+\frac{E}{z^4}a^4-\frac{F}{z^5}a^5;$$

en substituant donc, il viendra

$$1=A\left\{1-a+a^2.\frac{15(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}-a^3.\frac{5(4-z^2)}{2(60-15z^2+2z^4)}\right.$$

$$\left.+a^4.\frac{5}{2(60-15z^2+2z^4)}-a^5.\frac{1}{2(60-15z^2+2z^4)}\right\};$$

faisant enfin $z=0$, tirant la valeur de A, et changeant a en x; nous aurons, pour troisième approximation,

$$e^x=\frac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}}.$$

Il n'en faut pas davantage pour être conduit à soupçonner que l'on doit avoir généralement et rigoureusement

$$e^x=\frac{1}{1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\dots\dots};$$

et en effet, cette formule est exacte ; car, en y changeant x en $-x$, elle devient

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\dots;$$

formule connue.

PROBLÈME III. Trouver le sinus et le cosinus d'un arc donné quelconque ?

Solution. Soit x l'arc donné et y son sinus ; on aura l'équation

$$y=\text{Sin}.x;$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{dy}{dx}=\text{Cos}.x\ ;$$

en prenant la somme des quarrés de ces deux équations, il viendra

$$y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1\ .$$

Pour nous délivrer des quarrés, qui embarrasseraient le calcul, différentions de nouveau ; ce qui donnera, en divisant par $\frac{dy}{dx}$,

$$y+\frac{d^2y}{dx^2}=0\ .$$

Les deux constantes que comporte l'intégrale de cette équation doivent être déterminées par cette double considération qu'à $x=0$ doivent répondre $y=0$ et $\frac{dy}{dx}=1$.

Changeons x en $a+zx$; l'équation différentielle deviendra

$$z^2y+\frac{d^2y}{dx^2}=0\ ; \qquad (1)$$

les deux constantes devront alors être déterminées par cette double considération qu'à $a+zx=0$ ou à $x=-\frac{a}{z}$ doivent répondre $y=0$, $\frac{dy}{dx}=z$; et les sinus et cosinus de a seront ce que deviennent y et $\frac{1}{z}\frac{dy}{dx}$, respectivement, lorsqu'on suppose $x=0$.

Comme nous avons déjà deux conditions à remplir, relativement aux constantes ; la supposition la plus simple que nous puissions admettre est

$$y=A+Bx+Cx^2\ ; \qquad (5)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2C\;;\qquad (6)$$

de sorte qu'on aura

$$\text{Sin.}a=A\,,\qquad \text{Cos.}a=\frac{B}{z}\,;$$

En substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$z^2(A+Bx+Cx^2)+2C=0\;;$$

c'est-à-dire,

$$(Az^2+2C)+Bz^2+Cz^2x^2=0\,.\qquad (7)$$

Nous ferons ici la seule hypothèse $x=0$; laquelle donnera

$$Az^2+2C=0\,,$$

ou bien

$$A+2\frac{C}{z^2}=0;$$

les conditions relatives aux constantes donnent d'ailleurs,

$$0=A-a\frac{B}{z}+a^2\frac{C}{z^2},\quad 1=\frac{B}{z}-2a\frac{C}{z^2}\;;$$

éliminant donc $\frac{C}{z^2}$ entre ces équations, et tirant des équations résultantes les valeurs de A et $\frac{B}{z}$, il viendra

$$A=\frac{a}{1+\frac{a^2}{2}}\,,\quad \frac{B}{z}=\frac{1-\frac{a^2}{2}}{1+\frac{a^2}{2}}\,,$$

d'où z disparaît de lui-même. Changeant donc a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$\text{Sin.}x=\frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}\,;\qquad \text{Cos.}x=\frac{1-\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x^2}{2}}\,;$$

d'où

$$\text{Tang.}x=\frac{x}{1-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\,, \qquad (5')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2C+6Dx+12Ex^2\,. \qquad (6')$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$z^2(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)+2(C+3Dx+6Ex^2)=0\,;$$

ou, en ordonnant,

$$(Az^2+2C)+(Bz^2+6D)x+(Cz^2+12E)x^2+Dz^2x^3+Ez^2x^4=0\,; \qquad (7')$$

supposant successivement x égal à -1, 0, $+1$, il viendra

$$0=(Az^2+2C)-(Bz^2+6D)+(Cz^2+12E)-Dz^2+Ez^2\,,$$

$$0=(Az^2+2C)\,,$$

$$0=(Az^2+2C)+(Bz^2+6D)+(Cz^2+12E)+Dz^2+Ez^2\,;$$

prenant les différences consécutives de ces trois équations, il viendra

$$0=(Bz^2+6D)-(Cz^2+12E)+Dz^2-Ez^2\,,$$

$$0=(Bz^2+6D)+(Cz^2+12E)+Dz^2-Ez^2\,;$$

prenant enfin la demi-différence de ces deux-ci, on aura

$$o=(Cz^2+12E)+Ez^2.$$

d'où, en remontant,

$$o=(Bz^2+6D)+Dz^2;$$

$$o=(Az^2+2C).$$

On tirera de ces trois dernières équations

$$\frac{C}{z}=-\tfrac{1}{2}A, \quad \frac{D}{z^3}=-\frac{1}{6+z^2}\cdot\frac{B}{z}, \quad \frac{E}{z^4}=+\frac{A}{2(12+z^2)};$$

les conditions relatives aux constantes sont d'ailleurs ici

$$o=A-a\frac{B}{z}+a^2\frac{C}{z^2}-a^3\frac{D}{z^3}+a^4\frac{E}{z^4},$$

$$1=\frac{B}{z}-2a\frac{C}{z^2}+3a^2\frac{D}{z^3}-4a^3\frac{E}{z^4};$$

en y substituant donc les trois valeurs ci-dessus, elles deviendront en faisant de suite $z=o$, excepté dans le dénominateur de B.

$$\left(1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}\right)A-\left(a-\frac{a^3}{6}\right)\frac{B}{z}=o.$$

$$\left(a-\frac{a^3}{6}\right)A+\left(1-\frac{a^2}{2}\right)\frac{B}{z}=1,$$

desquelles on tirera

$$A=\frac{a-\frac{a^3}{6}}{1-\frac{a^4}{24}+\frac{a^6}{144}}, \quad \frac{B}{z}=\frac{1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}}{1-\frac{a^4}{24}+\frac{a^6}{144}},$$

changeant donc a en x, nous aurons, pour seconde approximation,

$$\text{Sin.}x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}\right)^2}=$$

$$\text{Cos.}x=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}\right)^2};$$

d'où

$$\text{Tang.}x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}.$$

Si nous admettions deux termes de plus à la valeur hypothétique de y, en opérant d'une manière semblable, nous trouverions, pour troisième approximation,

$$\text{Sin.}x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2};$$

$$\text{Cos.}x=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)^2};$$

d'où

$$\text{Tang.}x=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}}.$$

La marche de ces résultats nous conduit à soupçonner avec fondement, qu'en posant, en général,

$$M=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots;$$

$$N=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{7!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\ldots,$$

on doit avoir

$$\text{Sin.}x=\frac{N}{M^2+N^2};\quad \text{Cos.}x=\frac{M}{M^2+N^2};$$

d'où

$$\text{Tang.}x=\frac{N}{M};$$

or, s'il en est ainsi, on devra avoir

$$1=\text{Sin.}^2x+\text{Cos.}^2x=\left(\frac{N}{M^2+N^2}\right)^2+\left(\frac{M}{M^2+N^2}\right)^2=\frac{1}{M^2+N^2};$$

d'où on conclura

$$M^2+N^2=1;$$

on aura donc simplement

$$\text{Sin.}x=N,\qquad \text{Cos.}x=M;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

$$\text{Cos.}x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\ldots\ldots$$

ce qui, en effet, est rigoureusement vrai.

PROBLÈME IV. Déterminer la longueur d'un arc de cercle dont la tangente est donnée?

Solution.

Solution. Soit x la tangente donnée et y l'arc cherché auquel elle appartient ; nous aurons l'équation

$$x=\text{Tang}.y\,, \qquad \text{ou} \qquad x\text{Cos}.y=\text{Sin}.y\,,$$

ou, en différentiant,

$$\text{Cos}.y-x\frac{dy}{dx}\text{Sin}.y=\frac{dy}{dx}\text{Cos}.y\,.$$

En éliminant Cos.y entre ces deux équations, Sin. y disparaîtra aussi, et nous aurons l'équation

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}-1=0\,.$$

Dans laquelle la constante doit se déterminer par cette considération que x et y doivent être nuls en même temps.

Changeant, dans cette équation, x en $a+zx$, elle deviendra

$$\{(1+a^2)+2azx+z^2x^2\}\frac{dy}{dx}-z=0\,, \qquad (1)$$

où la constante se déterminera par la considération qu'à $a+zx=0$ ou $x=-\frac{a}{z}$ doit répondre $y=0$; et l'arc cherché, dont la tangente est a, sera ce que devient y, lorsqu'on suppose $x=0$.

Posons d'abord simplement

$$y=A+Bx\,; \qquad (5)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B\,; \qquad (6)$$

mettant cette valeur dans (1), elle deviendra

$$B\{(1+a^2)B-z\}+2azx+z^2x^2\}-z=0;$$

ou, en ordonnant,

$$\{(1+a^2)B-z\}+2azBx+z^2Bx^2=0\,. \qquad (7)$$

En supposant $x=0$, cette équation donnera

$$(1+a^2)B-z=0\,;$$

la condition relative à la constante donnera d'ailleurs

$$0=A-\frac{a}{z}B\,;$$

éliminant B entre les deux, on aura

$$A=\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})-(a-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,;$$

changeant donc a en x, nous aurons, pour première approximation,

$$\text{Arc}(\text{Tang.}=x)=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})-(x-1\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,.$$

Posons, en second lieu,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3\,,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2\,; \qquad (6')$$

substituant dans l'équation (1), elle deviendra

$$\{(1+a^2)+2azx+z^2x^2\}(B+2Cx+3Dx^2)-z=0\,,$$

ou en développant, ordonnant et posant, pour abréger,

$$(1+a^2)B-z=A' ,$$

$$2aBz+2(1+a^2)C=B' ,$$

$$Bz^2+4aCz+3(1+a^2)D=C' ,$$

$$2Cz^2+6aDz=D' ,$$

$$3Dz^2=E' ;$$

$$0=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4 , \qquad (7)$$

faisant successivement pour x, dans cette dernière, les suppositions -1, 0, $+1$, il viendra

$$0=A'-B'+C'-D'+E' ,$$

$$0=A' ,$$

$$0=A'+B'+C'+D'+E' ;$$

d'où, en prenant les différences consécutives,

$$0=B'-C'+D'-E' ,$$

$$0=B'+C'+D'+E' ;$$

prenant la demi-différence de ces deux dernières, il viendra

$$C'+E'=0 ,$$

d'où

$$B'+D'=0 ,$$

nous avons d'ailleurs

$$A'=0 ;$$

nous aurons donc, en substituant,

$$(1+a^2)B-z=0\ ,$$

$$azB+\{(1+a^2)+z^2\}C+3azD=0\ ,$$

$$z^2B+4azC+3\{(1+a^2)+z^2\}D=0\ ;$$

d'où on tire

$$\frac{B}{z}=\frac{3z^2}{1+a^2}\ ,$$

$$\frac{C}{z^2}=-\frac{a}{(1+a^2)^2+2(1-a^2)z^2+z^4}\ ;$$

$$\frac{D}{z^3}=-\frac{(1-3a^2)+z^2}{3(1+a^2)\{(1+a^2)^2+2(1-a^2)z^2+z^4\}}\ ;$$

La condition relative à la constante donne d'ailleurs

$$A=a\frac{B}{z}+a^2\frac{C}{z^2}+a^3\frac{D}{z^3}\ ;$$

substituant donc, et faisant, après la substitution, $z=0$, nous aurons

$$A=\frac{a}{1+a^2}-\frac{a^2}{2(1+a^2)^2}\cdot 2a+\frac{a^3}{3(1+a^2)^3}(3a^2-1)\ ;$$

c'est-à-dire,

$$A=\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})-(a-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{a^2}{2(1+a^2)^2}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})^2-(a-\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{a^3}{3(1+a^2)^3}\cdot\frac{(a+\sqrt{-1})^3-(a-\sqrt{-1})^3}{2\sqrt{-1}}\ ;$$

ou bien, en changeant a en x,

$$\text{Arc}(\text{Tang}=x)=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})-(x-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^2-(x-\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^3-(x-\sqrt{-1})^3}{2\sqrt{-1}}\,.$$

En admettant deux termes de plus dans la valeur hypothétique de y, on trouverait

$$\text{Arc.}(\text{Tang.}=x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\frac{(y+\sqrt{-1})-(x-\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^2-(x-\sqrt{-1})^2}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^3-(x-\sqrt{-1})^3}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^4\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^4-(x-\sqrt{-1})^4}{2\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5\cdot\frac{(x+\sqrt{-1})^5-(x-\sqrt{-1})^5}{2\sqrt{-1}}\,;$$

série, dont la loi est évidente, et qu'on peut prolonger aussi loin qu'on le voudra.

Il ne serait peut-être pas aisé de ramener ce développement aux formules connues; mais on ne saurait néanmoins en contester l'exactitude. Pour ne laisser aucun doute à cet égard, appliquons-le à la recherche du nombre $\frac{\pi}{4}$, dont la valeur, approchée à moins d'une demi-unité décimale du 12.e ordre, est

$$\frac{\pi}{4}=0,785398163397\ldots$$

Pour y parvenir, il ne s'agira que de faire $x=1$, dans la formule ci-dessus; les termes, dont l'indice est divisible par 4, disparaîtront d'eux-mêmes, et il viendra

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}=&+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}\right)=+\frac{5}{1.2.3}\\
&-\left(\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{7}\right)\quad-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{46}{5.6.7}\\
&+\left(\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{11}\right)\quad+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{127}{9.10.11}\\
&-\left(\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{14}+\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{15}\right)\quad-\frac{1}{2^6}\cdot\frac{248}{13.14.15}\\
&+\left(\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{17}+\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{19}\right)\quad+\frac{1}{2^8}\cdot\frac{409}{17.18.19}\\
&-\left(\frac{1}{2^{11}}\cdot\frac{1}{21}+\frac{1}{2^{11}}\cdot\frac{1}{22}+\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{1}{23}\right)\quad-\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{610}{21.22.23}\\
&+\left(\frac{1}{2^{13}}\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{2^{13}}\cdot\frac{1}{26}+\frac{1}{2^{14}}\cdot\frac{1}{27}\right)\quad+\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{851}{25.26.27}\\
&-\left(\frac{1}{2^{15}}\cdot\frac{1}{29}+\frac{1}{2^{15}}\cdot\frac{1}{30}+\frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{1}{31}\right)\quad-\frac{1}{2^{14}}\cdot\frac{1132}{29.30.31}\\
&+\left(\frac{1}{2^{17}}\cdot\frac{1}{33}+\frac{1}{2^{17}}\cdot\frac{1}{34}+\frac{1}{2^{18}}\cdot\frac{1}{35}\right)\quad+\frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{1453}{33.34.35}\\
&-\left(\frac{1}{2^{19}}\cdot\frac{1}{37}+\frac{1}{2^{19}}\cdot\frac{1}{38}+\frac{1}{2^{20}}\cdot\frac{1}{39}\right)\quad-\frac{1}{2^{18}}\cdot\frac{1814}{37.38.39}
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{1}{2^{21}}\cdot\frac{1}{41}+\frac{1}{2^{21}}\cdot\frac{1}{42}+\frac{1}{2^{22}}\cdot\frac{1}{43}\right) \quad +\frac{1}{2^{20}}\cdot\frac{2215}{41.42.43}$$

$$-\left(\frac{1}{2^{23}}\cdot\frac{1}{45}+\frac{1}{2^{23}}\cdot\frac{1}{46}+\frac{1}{2^{24}}\cdot\frac{1}{47}\right) \quad -\frac{1}{2^{22}}\cdot\frac{2656}{45.46.47}$$

$$+\left(\frac{1}{2^{25}}\cdot\frac{1}{49}+\frac{1}{2^{25}}\cdot\frac{1}{50}+\frac{1}{2^{26}}\cdot\frac{1}{51}\right) \quad +\frac{1}{2^{24}}\cdot\frac{3137}{49.50.51}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots$$

série dont le terme général est

$$\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{20n^2-19n+4}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)};$$

En réduisant ses termes en décimales, on aura

$$\frac{\pi}{4}=+\frac{5}{1.2.3}=+0.833333333$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{46}{5.6.7}=\ldots\ldots\ldots\ldots-0,054761905$$

$$+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{127}{9.10.11}=+0.008017677$$

$$-\frac{1}{4^3}\cdot\frac{248}{13.14.15}=\ldots\ldots\ldots\ldots-0,001419414$$

$$+\frac{1}{4^4}\cdot\frac{409}{17.18.19}=+0.000274795$$

$$-\frac{1}{4^5}\cdot\frac{610}{21.22.23}=\ldots\ldots\ldots\ldots-0,000056061$$

$$+\frac{1}{4^6}\cdot\frac{851}{25.26.27}=+0.000011838$$

$$-\frac{1}{4^7}\cdot\frac{1132}{29.30.31}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ -0{,}000002562$$

$$+\frac{1}{4^8}\cdot\frac{1453}{33.34.35}=+0.000000565$$

$$-\frac{1}{4^9}\cdot\frac{1814}{37.38.39}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ -0{,}000000126$$

$$+\frac{1}{4^{10}}\cdot\frac{2215}{41.42.43}=+0.000000029$$

$$-\frac{1}{4^{11}}\cdot\frac{2656}{45.46.47}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ -0{,}000000007$$

$$+\frac{1}{4^{12}}\cdot\frac{3137}{49.50.51}=+0{,}000000001$$

$$-0{,}056240075$$

$$+0{,}841638238 \qquad +0{,}841638238$$

Ce qui donne . . . . $\frac{\pi}{4} = 0{,}785398163$;

valeur exacte jusqu'à la dernière décimale inclusivement.

Nous étant ainsi assurés de l'exactitude et de la commodité de notre méthode, par son application à des cas déjà connus ; il ne nous reste plus qu'à l'appliquer à des équations différentielles qu'on ne sait pas encore intégrer, et à examiner si elle ne serait pas susceptible de quelques simplifications ; et ce sera le sujet d'un second mémoire.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Application du calcul aux différences partielles à la résolution de quelques problèmes d'analise ;

Par M. Frédéric Sarrus.

Le calcul aux différences partielles, qui doit son origine à des questions de géométrie et de mécanique, a été postérieurement appliqué, d'une manière très-heureuse, par des géomètres du premier ordre, à des questions de pure analise. Ce sont quelques essais de ce genre d'application que nous nous proposons de présenter ici, en employant successivement cette branche de calcul et au développement des fonctions polynomiales en séries, et au problème du retour des suites.

§. I.

Développement en séries des fonctions polynomiales.

M. Paoli s'est déjà proposé de déduire des seuls principes du calcul différentiel tout ce qui est nécessaire pour parvenir au développement en séries des fonctions polynomiales : c'est du même sujet que nous nous proposons de nous occuper ici. Notre méthode étant un peu plus simple que celle de l'illustre Italien, nos résultats doivent aussi être moins compliqués que les siens.

Soit u une fonction de y qu'il soit question de développer suivant les puissances de x; y étant donnée par l'équation

$$y=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots\ldots$$

On aura d'abord cette suite d'équations

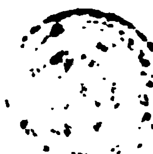
$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots\ldots)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{du}{da}=\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{da}=\dfrac{du}{dy}\ , \\[2ex]
\dfrac{du}{da_1}=\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{da_1}=x\dfrac{du}{dy}\ , \\[2ex]
\dfrac{du}{da_2}=\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{da_2}=x^2\dfrac{du}{dy}\ , \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{du}{da_n}=\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{da_n}=x^n\dfrac{du}{dy}\ ;
\end{array}\right\}(1)$$

dans lesquelles a, a_1, a_2, ...a_n sont traitées comme indépendantes.

Éliminant $\frac{du}{dy}$ entre chacune des équations (1) et la dernière, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{du}{da_n}=x^n\dfrac{du}{da}\ , \\[2ex]
\dfrac{du}{da_n}=x^{n-1}\dfrac{du}{da_1}\ , \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{du}{da_n}=x^{n-k}\dfrac{du}{da_k}\ .
\end{array}\right\}(2)$$



Mettant ensuite dans $\frac{du}{dx}$ les valeurs de $\frac{du}{dy}$, $x\frac{du}{dy}$, $x^2\frac{du}{dy}$,...., données par les équations (1), on trouve

$$\frac{du}{dx}=a_1\frac{du}{da}+2a_2\frac{du}{da_1}+3a_3\frac{du}{da_2}+4a_4\frac{du}{da_3}+\dots \qquad (3)$$

Posons, pour abréger,

$$u=A\,,\quad \frac{du}{dx}=A_1\,,\quad \frac{1}{2!}\,\frac{d^2u}{dx^2}=A_2\,,\quad \frac{1}{3!}\,\frac{d^3u}{dx^3}=A_3\,;\dots\frac{1}{n!}\,\frac{d^nu}{dx^n}=A_n\,.$$

La première des équations (2) donne

$$\frac{d\,.\,\frac{d^{n-\alpha}u}{dx^{n-\alpha}}}{da_n}-\frac{d^{n-\alpha}.\left(x^n\frac{du}{da}\right)}{dx^{n-\alpha}}=0\,;$$

pourvu qu'après la différentiation on suppose $x=0$. Partant

$$\frac{dA_{n-\alpha}}{da_n}=0\,. \qquad (4)$$

On tirerait de même de la dernière équation (2)

$$\frac{dA_{n+p}}{da_n}=\frac{dA_{k+p}}{da_k}\,; \qquad (5)$$

et enfin de l'équation (3)

$$nA_n=a_1\frac{dA_{n-1}}{da}+2a_2\frac{dA_{n-1}}{da_1}+3a_3\frac{dA_{n-1}}{da_2}+\dots \qquad (6)$$

équation qu'en vertu de l'équation de condition (5) qu'on peut changer en celle-ci,

$$nA_n = a_1\frac{dA_{n-1}}{da} + 2a_2\frac{dA_{n-2}}{da} + 3a_3\frac{dA_{n-3}}{da} + \ldots\ldots; \qquad (7)$$

ou encore

$$nA_n = a_1\frac{dA_{n+a}}{da_{a+1}} + 2a_2\frac{dA_{n+a}}{da_{a+2}} + 3a_3\frac{dA_{n+a}}{da_{a+3}} + \ldots. \qquad (8)$$

L'équation (6) exprime suivant quelle loi chacune des quantités A_1, A_2, A_3, ... dérive de celle qui la précède immédiatement.

La formule (7), ne renfermant de différentiations que par rapport à a, permet d'employer les valeurs particulières ou numériques de a_1, a_2, a_3, ..., et de faire ainsi les réductions à mesure qu'elles se présenteront; ce qui, dans bien de cas, la rendra préférable.

Enfin, la formule (8) donne le moyen de revenir de l'une quelconque des quantités A_2, A_3, A_4, ... à celle qui la précède. Elle devient illusoire lorsque $n=0$; ce qu'il n'était pas difficile de prévoir.

Au moyen de la rélation que l'équation (8) établit entre les divers coefficiens de x, dans le développement de u, on peut donner une infinité de formes différentes à la formule (6). Nous avons rapporté seulement les plus remarquables; mais son emploi peut devenir plus intéressant. En effet, les équations (4) et (8) peuvent se concentrer en celle-ci

$$\frac{dA_m}{da_n} = \frac{dA_{m-a}}{da_{n-a}},$$

de laquelle on tirera facilement

$$\frac{d^2A_m}{da^2_n} = \frac{d^2A_{m-a}}{da_{n-a}.da_n} = \frac{d^2.A_{m-2a}}{(da_{n-a})^2};$$

et, en général,

$$\frac{d^pA_m}{da^p_n}=\frac{d^pA_{m-p\alpha}}{(da_{n-\alpha})^p}. \qquad (9).$$

Maintenant, on a

$$A_m=A_m+a_n\frac{dA_m}{da_m}+\frac{a^2_n}{2!}\frac{d^2A_m}{da_n^2}+\frac{a^3_n}{3!}\cdot\frac{d^3A_m}{da^3_n}+\dots$$

pourvu qu'après les différentiations on fasse $a_n=0$, dans les quantités A_m, $\frac{dA_m}{da_n}$, $\frac{d^2A_m}{da^2_n}$,...... du second membre. L'on aura donc, en vertu de l'équation (9)

$$A_m=A_m+a_n\frac{dA_{m-\alpha}}{da_{n-\alpha}}+\frac{a^2_n}{2!}\cdot\frac{d^2A_{m-2\alpha}}{(da_{n-\alpha})^2}+\frac{a^3_n}{3!}\cdot\frac{d^3A_{m-3\alpha}}{(da_{n-\alpha})^3}+\dots;$$

moyennant les mêmes restrictions ; et comme, dans la dernière équation, les différentiations ne sont plus relatives à a_n, on trouvera la valeur de A_m, dans la supposition de a_n quelconque, si l'on a les valeurs de A_m, $A_{m-\alpha}$, $A_{m-2\alpha}$,......, dans la supposition de $a_n=0$, sans que pour cela on soit obligé de recommencer les calculs.

Par le moyen des formules précédentes, on pourra s'élever, de proche en proche, à la valeur de A_n, en fonction de a_1, a_2, a_3, ... A, et des coefficiens différentiels de cette dernière quantité ; mais cette marche, d'ailleurs très-laborieuse, ne serait fondée que sur l'analogie. Voici, pour le même objet, une méthode en même temps plus expéditive et plus rigoureuse.

Si l'on fait, pour abréger,

$$t=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\dots\dots;$$

on aura

$$y=a+tx\,; \qquad \text{et} \qquad u=f(a+tx)\,;$$

ou bien, en développant,

$$u = A + \frac{dA}{da} . tx + \frac{d^2 A}{da^2} \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{d^3 A}{da^3} \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots .$$

On a d'ailleurs

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} \frac{d.t^n}{da_1},$$

$$\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{1}{n!} \frac{d^2.t^n}{da^2_1},$$

$$\dots\dots\dots\dots ;$$

$$\frac{t^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \frac{d^k.t^n}{da^k_1};$$

ainsi

$$u = A + \frac{1}{n!}\left(x \frac{dA}{da} . \frac{d^{n-1}.t^n}{da_1^{n-1}} + x^2 \frac{d^2 A}{da^2} . \frac{d^{n-2}.t^n}{da_1^{n-2}} + \dots\dots + x^n \frac{d^n A}{da^n} . t^n \right)$$

si donc l'on suppose

$$t^n = B + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots\dots$$

on aura

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{dA}{da} . \frac{d^{n-1}.B_{n-1}}{da_1^{n-1}} + \frac{d^2 A}{da^2} . \frac{d^{n-2}B_{n-2}}{da_1^{n-2}} + \dots\dots + \frac{d^n A}{da^n} B \right\};$$

ou, en renversant l'ordre des termes,

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n A}{da^n} B + \frac{d^{n-1} A}{da^{n-1}} \frac{dB_1}{da_1} + \dots + \frac{dA}{da} . \frac{d^{n-1}B_{n-1}}{da_1^{n-1}} \right\}.$$

Mais, en suivant la marche qui nous a conduit aux formules (6) et (7), nous trouverions

$$kB_k = a_2 \frac{dB_{k-1}}{da_1} + 2a_3 \frac{dB_{k-1}}{da_2} + 3a_4 \frac{dB_{k-1}}{da_3} + \dots .$$

Partant, si l'on fait

$$B=C\,,\quad \frac{dB_1}{da_1}=C_1\,,\quad \frac{d^2B_2}{da_1^2}=C_2\,,\ \ldots\ldots\ \frac{d^kB_k}{da_1^k}=C_k\,;$$

on aura

$$kC_k=a_2\frac{d^2C_{k-1}}{da_1.da_1}+2a_3\frac{d^2C_{k-1}}{da_1.da_2}+3a_4\frac{d^2C_{k-1}}{da_1.da_3}+\ldots\ldots\,; \qquad (10)$$

et

$$kC_k=a_2\frac{d^2C_{k-1}}{da_1^2}+2a_3\frac{d^3C_{k-2}}{da_1^3}+3a_4\frac{d^4C_{k-3}}{da_1^4}+\ldots\ldots\,; \qquad (11)$$

et par conséquent

$$A_n=\frac{1}{n!}\left(C\frac{d^nA}{da^n}+C_1\frac{d^{n-1}A}{da^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-2}A}{da^{n-2}}+\ldots\ldots+C_{n-1}\frac{dA}{da}\right) \qquad (12)$$

La réunion de la formule (12) avec une des formules (10) et (11) remplit l'objet proposé.

Voici enfin une méthode très-simple, pour construire tout d'un coup l'entier développement de z. Soit fait

$$\frac{1}{1-htx}=1+htx+h^2t^2x^2+h^3t^3x^3+\ldots\ldots=H\,;$$

on aura alors

$$z=AH+\frac{1}{1!1!}\frac{dA}{da}\cdot\frac{dH}{dh}+\frac{1}{2!2!}\frac{d^2A}{da^2}\cdot\frac{d^2H}{dh^2}+\frac{1}{3!3!}\frac{d^3A}{da^3}\cdot\frac{d^3H}{dh^3}+\ldots \qquad (13)$$

pourvu que, dans le second membre, on fasse $h=0$, après les différentiations. D'où l'on voit qu'étant donné le développement de H, on aura très-facilement celui de z. Supposons donc

$$H=1+E_1x+E_2x^2+E_3x^3+\ldots\ldots;$$

on trouvera facilement l'équation

$$E_n=h(a_1E_{n-1}+a_2E_{n-2}+a_3E_{n-3}+\dots+a_{n-1}E_1+a_n)\,, \qquad (14)$$

pour déterminer chaque terme de H, en fonction de ceux qui le précèdent.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que u n'était fonction que d'une seule quantité y, qui n'était elle-même fonction que de x; mais à présent supposons

$$u=\mathrm{f}(y\,,y')\,;$$

$$\begin{aligned}y=a_{0,0}&+a_{1,0}x+a_{2,0}x^2+\dots\\&+a_{0,1}z+a_{1,1}xz+\dots\\&+a_{0,2}z^2+\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'=b_{0,0}&+b_{1,0}x+b_{2,0}x^2+\dots\\&+b_{0,1}z+b_{1,1}xz+\dots\\&+b_{0,2}z^2+\dots\end{aligned}$$

y et y' étant la sommé de tous les termes de la forme $a_{m,n}x^mz^n$, $b_{m,n}x^mz^n$ que l'on peut faire, en prenant pour m, n tous les nombres entiers positifs, zéro compris, pourront se mettre sous cette forme

$$y=\Sigma(a_{m,n}x^mz^n)\quad y'=\Sigma(b_{m,n}x^mz^n)\,.$$

Cela posé, regardant comme entièrement indépendantes les diverses quantités x, z, $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, et différentiant dans cette vue, on trouvera facilement

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\Sigma\left\{mx^{m-1}z^{n}\left(a_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+b_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y'}\right)\right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\Sigma\left\{nx^{m}z^{n-1}\left(a_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+b_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y'}\right)\right\}, \quad (2)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{p,q}}=x^{p}z^{q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \quad (3)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b_{p,q}}=x^{p}z^{q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y'}. \quad (4)$$

En vertu de ces deux dernières équations, on peut changer (1) et (2) en celles-ci

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\Sigma\left\{m\left(a_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{m-1,n}}+b_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b_{m-1,n}}\right)\right\}, \quad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\Sigma\left\{n\left(a_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{m,n-1}}+b_{m,n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b_{m,n-1}}\right)\right\}. \quad (6)$$

Mettant, dans l'équation (3), $p+h$ et $q+k$, au lieu de p et q; elle deviendra

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{p+h,q+k}}=x^{p+h}z^{q+k}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y};$$

qui, comparé avec l'équation (3), donne

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{p+h,q+k}}=x^{h}z^{k}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{p,q}}; \quad (7)$$

et on tirera de même de l'équation (4)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b_{p+h,q+k}}=x^{h}z^{k}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a_{p,q}}. \quad (8)$$

Maintenant, représentons en général par $A_{r,s}$ la valeur de

$$\frac{1}{r!s!}\frac{d^{r+s}u}{dx^r dz^s},$$

lorsqu'après les différentiations on y suppose x et z nuls. On aura d'abord

$$\begin{aligned}u = A_{0,0} + A_{1,0}x + A_{2,0}x^2 + \ldots\\ + A_{0,1}z + A_{1,1}zx + \ldots\\ + A_{0,2}z^2 + \ldots\end{aligned}$$

et ensuite, on tirera des équations (5), (6), (7), (8) les formules suivantes

$$rA_{r,s} = \Sigma\left\{m\left(a_{m,n}\frac{dA_{r-1,s}}{da_{m-1,n}} + b_{m,n}\frac{dA_{r-1,s}}{db_{m-1,n}}\right)\right\}, \qquad (9)$$

$$sA_{r,s} = \Sigma\left\{n\left(a_{m,n}\frac{dA_{r,s-1}}{da_{m,n-1}} + b_{m,n}\frac{dA_{r,s-1}}{db_{m,n-1}}\right)\right\}, \qquad (10)$$

$$\frac{dA_{f+h,g+k}}{da_{p+h,q+k}} = \frac{dA_{f,g}}{da_{p,q}}, \qquad (11)$$

$$\frac{dA_{f+h,g+k}}{db_{p+h,q+k}} = \frac{dA_{f,g}}{db_{p,q}}; \qquad (12)$$

au moyen des relations données par les équations (11), (12) on pourra donner une infinité de formes différentes aux formules (9), (10) : nous nous contenterons de rapporter les principales, qui sont

$$rA_{r,s} = \Sigma\left\{m\left(a_{m,n}\frac{dA_{r-m,s-n}}{da_{0,0}} + b_{m,n}\frac{dA_{r-m,s-n}}{db_{0,0}}\right)\right\}, \qquad (13).$$

$$sA_{r,s} = \Sigma\left\{n\left(a_{m,n}\frac{dA_{r-m,s-n}}{da_{0,0}} + b_{m,n}\frac{dA_{r-m,s-n}}{db_{0,0}}\right)\right\}, \qquad (14)$$

$$rA_{r,s}=\Sigma\left\{m\left(a_{m,n}\frac{dA_{r+h,s+k}}{da_{m+h,n+k}}+b_{m,n}\frac{dA_{r+h,s+k}}{db_{m+h,n+k}}\right)\right\}, \qquad (15)$$

$$sA_{r,s}=\Sigma\left\{n\left(a_{m,n}\frac{dA_{r+h,s+k}}{da_{m+h,n+k}}+b_{m,n}\frac{dA_{r+h,s+k}}{db_{m+h,n+k}}\right)\right\}; \qquad (16)$$

$$rB_r=\Sigma'\left\{m\left(a'_m\frac{dB_{r-1}}{da_{m-1,0}}+b'_m\frac{dB_{r-1}}{db_{m-1,0}}\right)\right\}, \qquad (17)$$

$$rB_r=\Sigma'\left\{m\left(a'_m\frac{dB_{r-m}}{da_{0,0}}+b'_m\frac{dB_{r-m}}{db_{0,0}}\right)\right\}, \qquad (18)$$

$$rB_r=\Sigma'\left\{m\left(a'_m\frac{dB_{r+h}}{da_{m+h,0}}+b'_m\frac{dB_{r+h}}{db_{m+h,0}}\right)\right\}. \qquad (19)$$

Dans ces trois dernières formules, le signe Σ' ne se rapporte qu'à m; et nous avons fait, pour abréger,

$$B_r=A_{r,0}+\frac{z}{x}A_{r-1,1}+\frac{z^2}{x^2}A_{r-2,2}+\ldots\ldots+\frac{z^r}{x^r}A_{0,r},$$

$$a'_m=a_{m,0}+\frac{z}{x}a_{m-1,1}+\frac{z^2}{x^2}a_{m-2,2}+\ldots\ldots+\frac{z^m}{x^m}a_{0,m};$$

$$b'_m=b_{m,0}+\frac{z}{x}b_{m-1,1}+\frac{z^2}{x^2}b_{m-2,2}+\ldots\ldots+\frac{z^m}{x^m}b_{0,m}.$$

Quant à la manière d'y parvenir, voici pour cela une méthode que je crois plus simple que l'emploi des formules (9), (10), (11), (12).

Les équations (1), (2) donnent

$$\frac{du}{dx}+\frac{z}{x}\,\frac{du}{dz}=\Sigma\left\{(m+n)(x^{m-1}z^n)\left(a_{m,n}\frac{du}{dy}+b_{m,n}\frac{du}{dy'}\right)\right\}$$

ou, en faisant $m+n=\omega$,

$$\frac{du}{dx}+\frac{z}{x}\,\frac{du}{dz}=\Sigma\left\{\alpha\,\frac{z^n}{x^n}\,x^{\alpha-1}\left(a_{\alpha-n,n}\,\frac{du}{dy}+b_{\alpha-n,n}\,\frac{du}{dy'}\right)\right\};$$

ou encore

$$\frac{du}{dx}+\frac{z}{x}\,\frac{du}{dz}=\Sigma'\left\{\alpha\left(a'_\alpha\,\frac{du}{da_{\alpha-1,0}}+b'_\alpha\,\frac{du}{db_{\alpha-1,0}}\right)\right\}; \qquad (20)$$

en mettant respectivement

$$\frac{du}{da_{m-1,0}} \quad \text{et} \quad \frac{du}{db_{m-1,0}},$$

à la place de $x^{m-1}\,\dfrac{du}{dy}$ et $x^{m-1}\,\dfrac{du}{dy'}$, ce qui est permis, en vertu des équations (3) et (4); et le signe Σ' ne se rapportant qu'à α. Enfin, on tirera de l'équation (20) une formule qui ne différera de la formule (17) qu'en ce que α y sera au lieu de m. Cette formule une fois trouvée, on en déduira facilement (18) et (19), au moyen des relations (11) et (12).

Enfin, l'on sait que le développement de u est égal à une suite de termes de la forme

$$\frac{d^{m+n}A_{0,0}}{da_{0,0}^{m}\,db_{0,0}^{n}}\cdot\frac{(y-a_{0,0})^m}{m!}\cdot\frac{(y'-b_{0,0})^n}{n!};$$

faisant ensuite

$$(y-h)^p(y'-k)^p=H,$$

on aura

$$\frac{(y-a_{0,0})^{p-r}(y'-b_{0,0})^{p-s}}{(p-r)!\,(p-s)!}=\frac{1}{p!\,p!}\,\frac{d^{r+s}H}{da_{0,0}^{r}\,db_{0,0}^{s}};$$

pourvu qu'après les différentiations l'on fasse $h=a_{0,0}$, $k=b_{0,0}$ dans le développement de H. On déduira donc par là, du développement

de H, tous les termes de celui de u, dans lesquels la somme des exposans de x et z ne sera pas plus grande que p.

Soit encore

$$H=\frac{1}{\{1-h(y-a_{0,0})\}\{1-k(y'-b_{0,0})\}},$$

on aura

$$(y-a_{0,0})^m(y'-b_{0,0})^n=\frac{1}{m!n!}\,\frac{d^{m+n}.H}{dh^m.dk^n};$$

pourvu que, dans le développement de H on suppose h et k nuls après les différentiations, ce qui fournit une autre méthode pour trouver le développement de u.

Nous pourrions donner, pour parvenir à ce même développement, une infinité d'autres méthodes plus ou moins compliquées; mais nous nous sommes contentés de rapporter les plus simples. Nous pourrions encore nous occuper du cas où u est fonction de plus de deux fonctions y, y'; du cas où y, y', ... seraient elles-mêmes fonctions de plus de deux variables indépendantes x, z; mais ces divers cas ne présenteront aucune difficulté sérieuse à ceux qui auront bien saisi l'esprit de notre méthode. Au surplus, de quelque nombre d'application que nos formules puissent être susceptibles, nous n'avons pas pensé qu'il dût être nécessaire d'en faire comprendre l'usage par des exemples qui n'auraient fait que donner à ce mémoire un surcroît d'étendue que nous avons sur-tout cherché à éviter. Nous terminerons sur ce sujet en observant que, bien que nous ayons supposé que u était fonction de y, y', sans $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, on peut cependant étendre notre méthode à ce cas, et cela, par un artifice ingénieux dû à l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*; il consiste à remplacer momentanément ces quantités par d'autres, que l'on regardera comme constantes dans les différentiations. On peut faire une semblable remarque pour le cas où u n'est fonction que de y seulement.

§. II.

Retour des suites.

Dans son *Traité de calcul différentiel et intégral*, (2.e édit., tom. I, pag. 298), M. Lacroix observe que, quelque élégant que soit l'emploi du *Théorème de Lagrange*, dans l'opération du retour des suites, il ne saurait être pourtant regardé comme indiquant la loi des formules auxquelles il conduit.

Frappé de cette remarque, qui nous a paru très-fondée, nous avons cherché une solution du problème qui ne fût pas sujette à cet inconvénient; et la suivante nous paraît remplir le but. A la vérité, elle sera jugée peut-être moins générale et moins élégante que celle de Lagrange; mais aussi est-il bien loin de notre pensée de prétendre lutter contre cet illustre géomètre.

Soit l'équation

$$a=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\dots\dots \quad (1)$$

et proposons-nous d'en tirer la valeur de z, ordonnée suivant les puissances de a. Cette valeur, quelle qu'elle soit, est évidemment une fonction des quantités a, a_1, a_2, a_3, ..., que nous regarderons comme indépendantes. Ainsi, différentiant successivement l'équation (1), par rapport à chacune de ces quantités, et posant, pour abréger,

$$k=a_1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\dots\dots$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}
k\frac{dz}{da}-1=0\,, \\
k\frac{dz}{da_1}+z=0\,, \\
k\frac{dz}{da_2}+z^2=0\,, \\
\dots\dots\dots \\
k\frac{dz}{da_n}+z^n=0\,.
\end{array}\right\}(2)$$

Eliminant k entre la première des équations (2) et chacune des suivantes, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dz}{da_1}+z\,\frac{dz}{da}=0\,, \\
\frac{dz}{da_2}+z^2\,\frac{dz}{da}=0\,, \\
\dots\dots\dots \\
\frac{dz}{da_n}+z^n\,\frac{dz}{da}=0\,.
\end{array}\right\}(3)$$

D'ailleurs, en remettant pour k sa valeur dans la première des équations (2), elle deviendra

$$1=a_1\frac{dz}{da}+2a_2z\frac{dz}{da}+3a_3z^2\frac{dz}{da}+4a_4z^3\frac{dz}{da}+\dots;$$

ou bien, en vertu des équations (3),

$$a_1\frac{dz}{da}=1+2a_2\frac{dz}{da_1}+3a_3\frac{dz}{da_2}+4a_4\frac{dz}{da_3}+\dots \qquad (4)$$

Supposons

$$z=A_1a+A_2a^2+A_3a^3+A_4a^4+\ldots\ldots;$$

en substituant cette valeur dans l'équation (4), la comparaison des termes semblables dans les deux membres donnera

$$a_1=1\,,$$

$$2a_1=2a_2\frac{dA_1}{da_1}+3a_3\frac{dA_1}{da_2}+4a_4\frac{dA_1}{da_3}+\ldots\ldots,$$

$$3a_1=2a_2\frac{dA_2}{da_1}+3a_3\frac{dA_2}{da_2}+4a_4\frac{dA_2}{da_3}+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$na_1=2a_2\frac{dA_{n-1}}{da_1}+3a_3\frac{dA_{n-1}}{da_2}+4a_4\frac{dA_{n-1}}{da_3}+\ldots\ldots;$$

formules qui indiquent suivant quelle loi le coefficient d'une puissance quelconque de a dérive de celui de la puissance immédiatement inférieure.

L'équation (3) donne

$$z^n=-n\frac{d\int z\,da}{da_{n-1}};$$

ou, en mettant pour z sa valeur,

$$z^n=-n\frac{d\left(\frac{A_1}{2}a^2+\frac{A_2}{3}a^3+\frac{A_3}{4}a^4+\ldots\ldots\right)}{da_{n-1}};$$

d'ailleurs z^n est de la forme

$$Ba^n+B_1a^{n+1}+B_2a^{n+2}+\ldots\ldots\ldots;$$

partant

dA

$$\frac{dA_{n-1-k}}{da_{n-1}}=0 ,$$

tant que k ne sera pas nul ; et

$$z^n=-\left(\frac{dA_{n-1}}{da_{n-1}}a^n+\frac{dA_n}{da^{n-1}}\cdot\frac{na^{n+1}}{n+1}+\frac{dA_{n+1}}{da_{n-1}}\cdot\frac{na^{n+2}}{n+2}+\ldots\right);$$

qui donnera facilement la valeur de z^n, quand celle de z sera connue.

Souvent on a

$$a=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\ldots ;$$

et alors c'est suivant les puissances de x qu'il faut ordonner le développement de z. Dans ce cas on a

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{da}\,\frac{da}{dx} ;$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{da}(b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3+\ldots) ;$$

On trouverait de même

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dz}{db_1}=x\,\dfrac{dz}{da} ,\\[2ex]
\dfrac{dz}{db_2}=x^2\,\dfrac{dz}{da} ,\\[2ex]
\dfrac{dz}{db_3}=x^3\,\dfrac{dz}{da} ,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots ;\\[2ex]
\dfrac{dz}{db_n}=x^n\,\dfrac{dz}{da} ;
\end{array}\right\}\quad(6)$$

partant

$$\frac{dz}{dx}=b_1\frac{dz}{da}+2b_2\frac{dz}{db_1}+3b_3\frac{dz}{db_2}+4b_4\frac{dz}{db_3}+\dots$$

mettant, dans cette dernière équation, au lieu de $\frac{dz}{da}$, sa valeur tirée de l'équation (4), et multipliant par a_1, on la changera en celle-ci

$$a_1\frac{dz}{dx}=b_1+2a_1b_2\frac{dz}{db_1}+3a_1b_3\frac{dz}{db_2}+\dots$$
$$+2b_1a_2\frac{dz}{da_1}+3b_1a_3\frac{dz}{da_2}+\dots$$

Supposant ensuite

$$z=C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\dots$$

et mettant cette valeur dans la formule précédente, on trouvera d'abord

$$a_1C_1=b_1,$$

et ensuite, en général,

$$\left.\begin{aligned}na_1C_n=2a_1b_2\frac{dC_{n-1}}{db_1}+3a_1b_3\frac{dC_{n-1}}{db_2}+4a_1b_4\frac{dC_{n-1}}{db_3}+\dots\\+2b_1a_2\frac{dC_{n-1}}{da_1}+3b_1a_3\frac{dC_{n-1}}{da_2}+4b_1a_4\frac{dC_{n-1}}{da_3}+\dots\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

pour la loi qui lie les coefficiens de deux puissances quelconques consécutives de x, dans le développement de z.

Si dans l'équation

$$z^n=-n\frac{d\int z\,da}{da_{n-1}},$$

on met pour da sa valeur

$$dx(b_1+2b_2x+3b_3x^2+4b_4x^3+\dots),$$

et pour z son développement ; on trouvera que le coefficient de x^m dans z^n est

$$-\frac{n}{m}\cdot\frac{d(b_1C_{m-1}+2b_2C_{m-2}+3b_3C_{m-3}+\dots)}{da};$$

D'où l'on voit qu'étant donné le développement de z, on en déduira facilement celui de z^n.

STATIQUE.

Démonstration d'un cas d'équilibre d'un polyèdre quelconque ;

Par M. Gergonne.



Il est connu depuis long-temps que, *si aux milieux des côtés d'un polygone plan quelconque, convexe ou non, on applique, dans le plan même de ce polygone, des forces respectivement proportionnelles aux longueurs de ces côtés, perpendiculaires à leurs directions, et agissant toutes du dedans au dehors ou toutes du dehors au dedans, le polygone demeurera en équilibre.* On en conclut qu'un fluide pesant et homogène intérieur ou extérieur à un polygone dont le plan est parallèle à celui de la surface supérieure du fluide ne saurait y engendrer aucun mouvement, et par suite que les pressions horizontales exercées par un fluide pesant, soit sur le vase qui le contient, soit sur un corps qui y

est plongé, se détruisent réciproquement (*). On en pourrait conclure également que, si l'on tend sur un polygone invariable une membrane homogène tendante à se contracter ou à se dilater, l'élasticité de cette membrane ne fera naître aucun mouvement dans le polygone.

Le théorème analogue, dans la géométrie à trois dimensions, est le suivant :

THÉORÈME. Si aux centres de gravité des aires de toutes les faces d'un polyèdre quelconque, non pesant, convexe ou non, on applique des puissances respectivement perpendiculaires aux plans de ces faces, et proportionnelles à leur étendue, agissant toutes du dedans au dehors ou toutes du dehors au dedans, le polyèdre demeurera en équilibre.

Il n'est pas à ma connaissance que ce théorème soit démontré nulle part ; et c'est à suppléer à cette omission que je consacre ce que l'on va lire.

1. Il est d'abord facile de démontrer que, *si, à un point quelconque de l'intérieur d'un tétraèdre quelconque, on applique quatre puissances respectivement perpendiculaires à ces faces et d'une intensité proportionnelle à leur étendue, ces puissances se feront équilibre.*

Soient, en effet, f, f', f'', f''' les faces du tétraèdre, et p, p', p'', p''' les puissances qui leur sont respectivement perpendiculaires, nous aurons

$$p=\lambda f\,,\quad p'=\lambda f'\,,\quad p''=\lambda f''\,,\quad p'''=\lambda f'''\,,$$

λ étant une constante ; nous aurons de plus

$$\text{Cos.}(p\,,p')=-\text{Cos.}(f\,,f')\,,\quad \text{Cos.}(p'\,,p'')=-\text{Cos.}(f'\,,f'')\,,$$

(*) Voyez entre autres l'*Hydrostatique* de BEZOUT.

$$\text{Cos.}(p'',p)=-\text{Cos.}(f'',f)\,.$$

La résultante r des trois puissances p, p', p'' sera (*) donnée par l'équation

$$r^2=p^2+p'^2+p''^2+2p'p''\text{Cos.}(p',p'')+2p''p\text{Cos.}(p'',p)+2pp'\text{Cos.}(p,p')\,;$$

et elle fera, avec les composantes, des angles θ, θ', θ'', données par les formules

$$\text{Cos.}\theta=\frac{1}{r}\{p+p'\text{Cos.}(p,p')+p''\text{Cos.}(p'',p)\}\,;$$

$$\text{Cos.}\theta'=\frac{1}{r}\{p'+p''\text{Cos.}(p',p'')+p\text{Cos.}(p,p')\}\,,$$

$$\text{Cos.}\theta''=\frac{1}{r}\{p''+p\text{Cos.}(p'',p)+p'\text{Cos.}(p',p'')\}\,.$$

En substituant donc, ces formules deviendront

$$r^2=\lambda^2\{f^2+f'^2+f''^2-2f'f''\text{Cos.}(f',f'')-2f''f\text{Cos.}(f'',f)-2ff'\text{Cos.}(f,f')\}$$

$$\text{Cos.}\theta=\frac{\lambda}{r}\{f+f'\text{Cos.}(f,f')-f''\text{Cos.}(f'',f)\}\,,$$

$$\text{Cos.}\theta'=\frac{\lambda}{r}\{f'+f''\text{Cos.}(f',f'')-f\,\text{Cos.}(f,f')\}\,;$$

$$\text{Cos.}\theta''=\frac{\lambda}{r}\{f''+f\,\text{Cos.}(f'',f)-f'\text{Cos.}(f',f'')\}\,;$$

(*) Voyez la page 55 du précédent volume.

mais, par le théorème de M. Carnot (*), on a

$$f^2+f'^2+f''^2-2f'f''\text{Cos.}(f,f'')-2f''f\text{Cos.}(f'',f)-2ff'\text{Cos.}(f,f')=f'''^2;$$

$$f-f'\text{Cos.}(f,f')-f''\text{Cos.}(f'',f)=f'''\text{Cos.}(f,f''');$$

$$f'-f''\text{Cos.}(f',f'')-f\text{Cos.}(f,f')=f'''\text{Cos.}(f',f''');$$

$$f''-f\text{Cos.}(f'',f)-f'\text{Cos.}(f',f'')=f'''\text{Cos.}(f'',f''');$$

substituant donc, il viendra

$$r^2=\lambda^2f'''^2=p'''^2;$$

$$\text{Cos.}\alpha=\frac{\lambda}{r}f'''\text{Cos.}(f,f''')=-\text{Cos.}(p,p'''),$$

$$\text{Cos.}\alpha'=\frac{\lambda}{r}f'''\text{Cos.}(f',f''')=-\text{Cos.}(p',p'''),$$

$$\text{Cos.}\alpha''=\frac{\lambda}{r}f'''\text{Cos.}(f'',f''')=-\text{Cos.}(p'',p''').$$

La résultante r des trois forces p, p', p'' est donc égale à p''', et dirigée suivant la même droite; et comme il est d'ailleur évident qu'elle agit en sens contraire de r, il s'ensuit que les quatre forces p, p', p'', p''' sont en équilibre.

On étendrait sans peine cette proposition et le calcul qui l'appuie à un polyèdre quelconque; mais ici la difficulté consiste en ce que, en général, les perpendiculaires menées aux plans des faces

---

(*) Voyez les pages 139, 140 du II.e volume du présent recueil.

d'un tétraèdre, et à plus forte raison d'un polyèdre quelconque, par les centres de gravité des aires de ces faces, ne passent pas par un même point (*). Il faut donc prendre une autre voie pour parvenir à notre but.

2. Considérons, en premier lieu, un tétraèdre dont le sommet soit S, dont l'arète SC soit perpendiculaire au plan de la base ACB, et où les côtés CA, CB de cette base, et conséquemment les arètes SA, SB soient de même longueur. Si, pour fixer les idées, nous supposons horizontal le plan de la base ACB; les faces SCA, SCB seront des triangles égaux, rectangles en C, dont les plans seront verticaux.

Sur SA, SB, SC soient pris, aux deux tiers de leurs longueurs, des points A′, B′, C′ par lesquels soit conduit un plan; ce plan sera horizontal, comme le plan ACB. Soit joint le milieu M de AB au sommet S par une droite coupant A′B′ en M′; ce point M′ sera le centre de gravité de l'aire de la face ASB; et sa projection N sur la base sera le centre de gravité de l'aire de cette base. Quant aux deux autres faces SCA, SCB, leurs centres de gravité respectifs seront les milieux de C′A′, C′B′.

Concevons qu'à ces centres de gravité, et perpendiculairement aux faces du tétraèdre, on applique quatre forces proportionnelles aux aires de ces faces, et agissant toutes soit du dehors au dedans soit du dedans au dehors; représentons par s, a, b, c les forces respectivement opposées à S, A, B, C. D'après ce qui vient d'être observé ci-dessus les forces c et s, la première perpendiculaire à la face ASB, et l'autre verticale, concourront au même point M′.

Quant aux forces égales et horizontales a, b, appliquées aux milieux des côtés C′A′, C′B′ du triangle isocèle A′C′B′, leurs directions concourront évidemment en quelque point de C′M′, et

(*) Voyez la page 143 du II.e volume de ce recueil.

elles auront là une résultante suivant C′M′, que l'on pourra considérer comme appliquée en M′ et que l'on pourra décomposer, en ce point, en deux forces a, b, égales et parallèles aux premières.

On aura donc ainsi, en un même point M′, quatre forces perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre, et proportionnelles aux aires respectives de ces faces; ces forces seront donc en équilibre (1); puis donc qu'elles forment un ensemble équivalent à celles du système primitif, ces dernières doivent l'être aussi.

3. Soit, en second lieu, un tétraèdre SABC dont les arètes SA, SB, SC soient égales, et dans lequel conséquemment la projection S′ du sommet sur le plan de la base soit le centre du cercle circonscrit à cette base. Pour fixer les idées, supposons que ce centre S′ soit intérieur au triangle ABC; soient menées S′A, S′B, S′C; par ces droites et par SS′ soient conduits trois plans: ces plans diviseront le tétraèdre en trois autres, dont chacun sera conditionné comme celui dont il vient d'être question (2).

Concevons que l'on applique aux centres de gravité des faces, et perpendiculairement à leurs plans, des puissances proportionnelles à l'étendue de ces faces; et, pour fixer les idées, supposons que ces puissances agissent du dehors au dedans. Celle qui sera appliquée à la base pourra, comme l'on sait, se décomposer en trois autres, parallèles à sa direction, proportionnelles aux aires des trois triangles AS′B, BS′C, CS′A, et appliquées à leurs centres de gravité.

Concevons qu'aux centres de gravité de chacune des trois faces SS′A, SS′B, SS′C, communes à nos trois tètraèdres, pris deux à deux, et dans des directions perpendiculaires à leurs plans, on applique deux forces égales et contraires, proportionnelles à l'étendue de ces faces. Ces forces étant d'elles-mêmes deux à deux en équilibre, elles ne changeront rien à l'état du système.

Mais, par suite de l'introduction de ces nouvelles forces, chacun des trois tétraèdres partiels, se trouvant sollicité comme l'était le tétraèdre

tétraèdre unique que nous avions précédemment considéré (2), sera de lui-même en équilibre ; le tétraèdre total le sera donc aussi ; il l'était donc déjà avant l'introduction de ces nouvelles forces.

Si le centre du cercle circonscrit à la base du tétraèdre total lui était extérieur, ce tétraèdre, au lieu d'être la somme des trois tétraèdres partiels, serait la somme de deux d'entre eux diminuée du troisième, ou l'un d'eux diminué de la somme des deux autres; et il n'y aurait de différence dans le raisonnement qu'en ce que les forces, sollicitant les tétraèdres pris soustractivement, devraient être considérées comme agissant du dedans au dehors, du moins si, comme nous l'avons supposé, les forces primitives agissaient du dehors au dedans. Ce serait l'inverse dans le cas contraire.

4. Soit, en troisième lieu, un tétraèdre quelconque, ABCD sollicité, aux centres de gravité des aires de ces faces, par des forces perpendiculaires à leurs plans et proportionnelles à leur étendue, que nous supposerons, pour fixer les idées, agir toutes du dehors au dedans.

Considérons le centre O de la sphère circonscrite comme le sommet commun de quatre tétraèdres partiels OABC, OBCD, OCDA, ODAB, ayant pour bases les faces ABC, BCD, CDA, DAB du premier ; si, pour fixer encore les idées, nous supposons le point O intérieur au tétraèdre proposé, ce tétraèdre sera la somme des quatre tétraèdres partiels, dont chacun sera d'ailleurs conditionné, comme celui du cas précédent (3).

Concevons qu'aux centres de gravité des aires des six faces AOB, AOC, BOC, AOD, BOD, COD, communes à nos tétraèdres partiels pris deux à deux, et perpendiculairement aux plans de ces faces, on applique deux forces égales et contraires, proportionnelles à leur étendue ; ces forces, étant deux à deux en équilibre, ne changeront rien à l'état du système.

Mais, par suite de l'introduction de ces mêmes forces, chacun des tétraèdres partiels se trouvera exactement dans le même cas que le tétraèdre unique du cas précédent (3) ; ce tétraèdre partiel

demeurera donc en équilibre ; le tétraèdre total y demeurera donc aussi : il devait donc être déjà en équilibre antérieurement à l'introduction de ces forces.

Si le centre O de la sphère circonscrite était extérieur au tétraèdre total, alors ce tétraèdre, au lieu d'être la somme des quatre tétraèdres partiels, pourrait être ou la somme de trois d'entre eux diminuée du quatrième, ou la somme de deux d'entre eux diminuée de la somme des deux autres, ou encore l'un d'entre eux diminué de la somme des trois autres ; et il n'y aurait de différence dans le raisonnement qu'en ce que, dans les tétraèdres partiels pris soustractivement, il faudrait supposer que les forces agissent du dedans au dehors, si du moins, comme nous l'avons admis, les forces primitives agissaient du dehors au dedans. Ce serait l'inverse dans le cas contraire.

5. Dans la démonstration relative au tétraèdre, on pourrait remplacer la considération du centre de la sphère circonscrite par celle du centre de la sphère inscrite ; en suivant à peu près le mode de décomposition indiqué à la page 346 du VI.e volume de ce recueil. Il se peut, au surplus, qu'il existe quelque procédé plus simple encore pour parvenir au but, et nous nous empresserions de le signaler s'il nous était offert.

6. Concevons un tétraèdre inscrit à un autre tétraèdre de telle manière que les sommets du premier soient les centres de gravité des aires des faces du second ; ces deux tétraèdres ayant les faces homologues parallèles chacune à chacune seront semblables, et les perpendiculaires élevées aux plans des faces de l'un, par les centres de gravité des aires de ces faces, seront dans l'autre les perpendiculaires abaissées des sommets sur les plans des faces opposées. De là, et de ce qui vient d'être démontré ci-dessus, on peut conclure la proposition suivante :

Si l'on applique aux quatre sommets d'un tétraèdre des forces de directions perpendiculaires aux plans des faces opposées et respectivement proportionnelles aux aires de ces faces, le tétraèdre demeurera en équilibre.

Par des considérations semblables, on s'assurera de la vérité de cette proposition analogue de géométrie plane :

Si on applique aux quatre sommets d'un triangle des forces situées dans son plan, perpendiculaires aux directions des côtés opposées, et proportionnelles aux longueurs respectives de ces côtés ; le triangle demeurera en équilibre.

7. Soit présentement une pyramide quelconque aux centres de gravité des aires des faces de laquelle soient appliquées, perpendiculairement à leurs directions, des forces proportionnelles à l'étendue de ces faces, et agissant toutes également soit du dehors au dedans soit du dedans au dehors.

Soit décomposée cette pyramide en tétraèdres, par des plans diagonaux ; et soit en même temps remplacée la force qui agit au centre de gravité de l'aire de sa base en d'autres forces parallèles à la direction de celle-là, ayant leurs points d'application aux centres de gravité des aires des triangles résultant de la décomposition de cette base, et des intensités respectivement proportionnelles aux aires de ces triangles, ce qui est permis.

Concevons de plus qu'au centre de gravité de l'aire de chacun des plans diagonaux qui divisent la pyramide en tétraèdre, on applique, perpendiculairement à la direction de ce plan, deux forces égales et contraires, proportionnelles à l'étendue de ce plan ; ces dernières forces se trouvant deux à deux en équilibre, leur introduction ne changera absolument rien à l'état du système.

Mais alors, chacun des tétraèdres résultant de la décomposition de la pyramide, se trouvant sollicité comme l'était le tétraèdre unique du cas précédent (4), sera de lui-même en équilibre ; la pyramide le sera donc aussi ; et conséquemment elle devait l'être déjà antérieurement à l'introduction des nouvelles forces.

8. Soit enfin un polyèdre quelconque aux centres de gravité des aires des faces duquel soient appliquées perpendiculairement à leurs directions, des forces proportionnelles à l'étendue de ces

faces, et agissant toutes également soit du dehors au dedans soit du dedans au dehors.

Soit décomposé ce polyèdre en pyramides ayant ses faces pour bases, et pour sommet commun un point pris arbitrairement dans son intérieur ; concevons qu'ensuite on applique au centre de gravité de l'aire de chacun des triangles qui servent de faces latérales communes à deux pyramides consécutives, et perpendiculairement au plan de ce triangle, deux forces égales et contraires, proportionnelles à l'étendue de ce même triangle ; les forces, ainsi introduites, se trouvant en équilibre deux à deux, ne pourront rien changer à l'état du système.

Mais alors, chacune des pyramides résultant de la décomposition du polyèdre, se trouvant sollicitée comme la pyramide unique du cas précédent (7), devra, pour cette raison, être elle-même en équilibre ; le polyèdre formé de l'ensemble de ces pyramides sera donc aussi en équilibre ; et conséquemment il devait l'être déjà antérieurement à l'introduction des nouvelles forces ; le théorème énoncé au commencement de cet article, se trouve donc ainsi rigoureusement et complètement démontré.

On peut déduire de ce théorème, entre autres conséquences, que *si un polyèdre libre non pesant se trouve plongé dans un fluide élastique indéfini sans pesanteur, ou que si un vase polyèdre libre non pesant et exactement fermé, placé dans le vide, se trouve rempli d'un fluide élastique sans pesanteur ; l'action du fluide sur la surface extérieure du polyèdre ou sur la surface intérieure du vase ne pourra y faire naître aucune sorte de mouvement.*

QUESTIONS RÉSOLUES.

Développement de la théorie sur laquelle il a été demandé des éclaircissemens à la page 291 *du IX.e volume de ce recueil ;*

Par M. Bérard, professeur de mathématiques, membre de plusieurs sociétés savantes.



Je rappelle l'énoncé du problème, parce que j'ai besoin de modifier un peu le procédé qui y est expliqué.

Soit $X=0$ une équation numérique en x, du degré m ; soit l_0 la limite inférieure des racines positives de cette équation ; soit changé, dans $X=0$, x en $x+l_0$, ce qui donnera une transformée $X_1=0$.

Soit l_1 la limite inférieure des racines positives de cette dernière équation ; en y changeant x en $x+l_1$, ou bien en changeant, dans $X=0$, x en $x+l_0+l_1$; ce qui revient au même, et ce qui est préferable, comme on le verra tout-à-l'heure ; on obtiendra une nouvelle transformée $X_2=0$.

Soit l_2 la limite inférieure des racines positives de celle-ci ; en changeant, dans $X=0$, x en $x+l_0+l_1+l_2$; on obtiendra une troisième transformée $X_3=0$.

En supposant que ce procédé ait été indéfiniment poursuivi de la même manière, on propose,

1.° De démontrer que, si la proposée $X=0$ a une ou plusieurs racines réelles positives, la série $l_0+l_1+l_2+\ldots\ldots$ sera convergente,

et aura pour limite de la somme de ses termes la plus petite de ces racines?

2.° D'expliquer ce que devient cette même série, dans le cas où la proposée, n'ayant aucune racine réelle positive, offre néanmoins une ou plusieurs variations?

§. I. *Première partie.*

Soit la proposée

$$X=0=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots\dots\dots+x^m$$

en y changeant x en $x+l$; et posant, pour abréger,

$$A=a+bl+cl^2+dl^3+el^4+\dots\dots\dots\dots\dots+l^m\ ,$$

$$B=b+2cl+3dl^2+4el^3+\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{m}{1}l^{m-1},$$

$$C=c+3dl+6el^2+\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}l^{m-2},$$

$$D=d+4el+\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}l^{m-3},$$

$$E=e+\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}l^{m-4},$$

ce qui donne, comme l'on sait,

$$B=\frac{dA}{dl}\ ,\ C=\frac{dB}{2dl}\ ,\ D=\frac{dC}{3dl}\ ,\ E=\frac{dD}{4dl}\ ,\dots\dots;$$

elle deviendra

$$X_n=0=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots\dots\dots+x^m\ .$$

En mettant donc dans les valeurs de A, B, C, ...; les nombres que représentent a, b, c, ...; il devient très-aisé de former les différentes transformées ; car il suffit d'y substituer successivement pour l, les valeurs l_0, l_0+l_1, $l_0+l_1+l_2$, ... des sommes de limites obtenues au moyen des transformées qui qui précèdent celles qu'on se propose d'obtenir.

La première recherche qui doit nous occuper ici est celle de la marche que suivent les coefficiens des transformées successives.

Imaginons que sur un axe indéfini OX, dont l'origine est en O, on ait construit la courbe parabolique $A=y$, dont l'abscisse variable est l; et qui sera évidemment la même que $X=y$; et qu'on ait placé les lettres A_1, A_2, A_3, ... aux points où l'axe coupe les branches de la courbe; ces lettres seront au nombre de m, si, comme nous le supposons d'abord, toutes les racines de $X=0$ sont réelles.

Soit construite sur le même axe la courbe $B=y_1$; et soient placées les lettres B_1, B_2, B_3, ... B_{m-1} aux points où cette courbe est coupée par l'axe.

Soit construite semblablement, et toujours sur le même axe ; la courbe $C=y_2$; et soient placées les lettres C_1, C_2, C_3, ... C_{m-2}, aux points d'intersection de cette courbe avec l'axe.

En poursuivant ainsi, jusqu'au dernier des coefficiens A, B, C, ..., lequel donnera une simple ligne droite ; on remarquera facilement les diverses circonstances que voici,

1.° Les points B_1, B_2, B_3, ... sont intermédiaires aux points A_1, A_2, A_3, ... ; les points C_1, C_2, C_3, ... le sont aux points B_1, B_2, B_3, ... ; et ainsi de suite.

2.° Les points B_1, B_2, B_3, ... sont les pieds des ordonnées *maxima* de la courbe $A=y$; les points C_1, C_2, C_3, ... sont les pieds des ordonnées *maxima* de la courbe $B=y_1$; et ainsi de suite.

3.° Le coefficient A est *maximum*, quand $B=0$; le coefficient B est *maximum*, quand $C=0$; et ainsi de suite.

4.° Les coefficiens A, B, C, ... croissent, décroissent et chan-

gent de signes respectivement et en même temps que les ordonnées y, y_1, y_2, ... des diverses courbes paraboliques.

5.° Enfin, toutes ces remarques subsistent, quelle que soit la valeur de l; puisque, dans la construction de ces courbes, l a été regardé comme l'abscisse.

Maintenant, il faut faire attention que, quand on change successivement, dans la proposée, x en $x+l_0$, $x+l_0+l_1$, $x+l_0+l_1+l_2$,....; on ne fait que déplacer l'origine des abscisses, en la transportant de O en O_1, O_2, O_3, ... Les ordonnées y, y_1, y_2, ... correspondant aux origines successives O; O_1, O_2, ... indiquent donc, tout à la fois, la grandeur et le signe des coefficiens A, B, C, ... des transformées.

Par là, il devient très-aisé de se rendre compte de la marche des coefficiens; on peut assigner, pour chacun, le signe, l'accroissement ou le décroissement, pour une position donnée de l'origine; ces considérations peuvent même fournir une démonstration très-simple de la *Règle de Descartes*; car il suffit pour cela de placer d'abord l'origine à gauche de toutes les branches, ce qui rend tous les signes alternatifs; puis de remarquer que, quand l'origine dépasse une branche, A change de signe, ce qui fait perdre une variation à l'équation. En continuant à faire mouvoir l'origine de gauche à droite, on se convaincra qu'il en est de même pour chaque racine positive qu'on fait perdre à l'équation.

La considération des mêmes courbes peut encore démontrer facilement la cause du grand nombre de combinaisons de signes que peut fournir une équation et expliquer la signification de chacune d'elles. Prenons un exemple simple; celui de l'équation du 3.me degré.

L'axe OX portera les lettres $OA_1B_1C_1A_2C_1B_2A_3X$. La lettre C_1 n'est placée qu'en un seul point, pour une même équation; mais, comme elle peut se trouver à droite ou à gauche du point A_2, il a fallu l'écrire deux fois, pour comprendre tous les cas possibles. Il en résulte 9 points qui comprennent entre eux 8 espaces ou

ou régions différentes. Chacune de ces régions correspond à une combinaison différente de signes, dont le nombre est ici $1+3+3+1=8=2^3$.

Si l'on considère le nombre des variations, on voit que, quand l'origine est dans l'espace OA_1, il y a trois variations dans l'équation; que, quand elle est dans l'espace A_1A_2, il y a deux variations; qu'il y en a une seule, quand cette origine est dans l'espace A_2A_3; qu'enfin il n'y en a aucune, quand elle est dans l'espace A_3X.

Pour le 4.me degré, le nombre des combinaisons de signes est $1+4+6+4+1=16=2^4$. En général, il est 2^m. C'est la somme $1+\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\ldots$ des coefficiens du développement de $(1+x)^m$.

On sent bien que les racines imaginaires changent la figure des courbes et la position de l'axe; mais elles ne détruisent pas les conséquences que nous voulons en tirer.

Les équations $A=0$, $B=0$, $C=0$, ... peuvent avoir des racines imaginaires, en sorte que quelques-unes des lettres A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... C_1, C_2, ... manquent; ce qui diminue le nombre des régions et par conséquent celui des combinaisons de signes qu'admet la proposée par la transformation de l'origine. Par exemple, si, la proposée étant du 3.me degré, les sommets sont réels; et si l'axe ne rencontre qu'une branche; au lieu de 7 combinaisons de signes, il n'y en aura plus que 5 seulement; parce que les points A_2, A_3 manqueront. Si les sommets ne sont pas réels, il n'y aura plus que 3 combinaisons de signes; parce que les lettres A_2, A_3, B_1, B_2 n'existeront plus.

Après avoir trouvé la loi des coefficiens A, B, C, ... dans les transformées successives, il reste à chercher celle de la série l_0, l_1, l_2, ...

On voit que cette loi doit dépendre, jusqu'à un certain point,

de la règle que l'on choisit pour déterminer la limite des x : prenons la plus simple. On sait que V étant le plus grand coefficient de signe contraire à celui du terme connu, on aura $l=\frac{A}{A+V}$; l sera donc toujours une fraction, comprise entre o et 1, qui augmentera ou diminuera d'une transformée à la suivante, selon que A aura augmenté ou diminué lui-même dans un plus grand ou dans un moindre rapport que V. En outre, quand il surviendra un changement de signe dans l'équation, V qui représentait un coefficient, B par exemple, en représentera un autre, qui entrera à son tour comme élément dans l'expression de l ; circonstance qui changera nécessairement la marche de la série l_0, l_1, l_2, ...

Il serait minutieux et sans doute pénible de signaler et de classer toutes les anomalies qui peuvent avoir lieu ; il suffit de remarquer que c'est le coefficient A qui joue le principal rôle et qui détermine la série à être ascendante ou descendante.

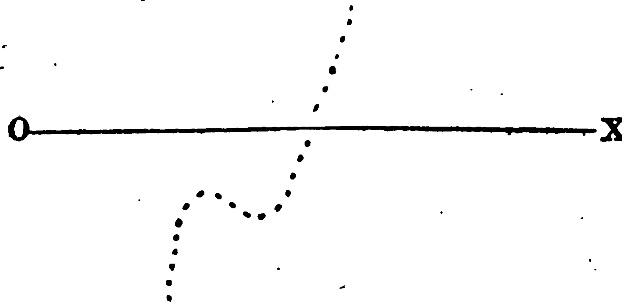
Le cas le plus simple est celui où l'origine est dans la région OA_1 et où toutes les racines sont réelles.

Quand on a $l=\frac{A}{A+B}$; à cause de $B=\frac{dA}{dl}$ on a $\frac{A}{B}=\frac{Adl}{dA}=\frac{ydx}{dy}$ $=$ *sous-tangente* $=s$, et $l=\frac{s}{s+A}$; or, s diminue, ainsi que y, depuis le point O jusqu'au point A_1 où ils sont nuls ; donc aussi la série est décroissante entre ces deux points. C'est ce qu'on voit pour l'équation $(x-1)(x-2)(x-3)=0$.

Quand l'origine est entre les points A_1 et B_1, la série est d'abord croissante, puis elle décroît jusqu'au point A_2, comme dans cette équation $(x+1)(x-3)=0$.

Lorsque la proposée a des racines imaginaires, la série suit encore assez exactement les accroissemens et les décroissemens du coefficient $A=y$. Ainsi, à mesure que l'origine s'approche de l'ordonnée *minima*, A diminue d'abord, sans pouvoir néanmoins devenir nul ;

puis il augmente sans changer de signe. De même, la série décroît pour croître ensuite et décroître de nouveau, autant de fois qu'il y a d'ordonnées *minima*. L'équation $x^3-6x^2+11x-6,4=0$ est dans ce cas ; la courbe est comme on la voit ici :



On trouvera $l_0=0,37$, $l_6=0,016$, correspondant au sommet convexe, $l_{10}=0,4$; $l_{11}=0,3$, correspondant au sommet concave ou ordonnée *maximum*, $l_{12}=0,12$; etc.

Cet exemple offre une singularité : c'est que le *maximum* de l arrive avant l'ordonnée *maximum*, par l'effet du changement de coefficient dans le dénominateur de $\frac{A}{A+V}$.

Au reste, il serait oiseux de s'appesantir sur la loi des accroissemens et décroissemens de la série ; car cette circonstance est tout-à-fait indifférente au succès de la méthode. Peu importe la marche de cette série ; l'essentiel est de savoir qu'elle finit toujours par devenir décroissante, et par converger vers l'intersection la plus proche à droite, or, cela est de toute évidence ; car ce n'est que dans les points A_1, A_2, ... qu'on a $A=0$, et par conséquent $l=0$.

Mais, nous a demandé un géomètre, ne pourrait-il pas se trouver à gauche de l'intersection dont on cherche à déterminer l'abscisse, un point que la série $l_0+l_1+l_2+$..... ne pût jamais dépasser ; ou,

en d'autres termes, ne pourrait-il pas arriver, quelquefois du moins, que la somme des termes de cette série eût une limite inférieure d'une quantité finie à la plus petite des racines positives? Je réponds que non. Tant qu'il existe une variation dans la dernière transformée, rien n'empêche d'en faire de nouvelles qui transportent l'origine sur la droite. Supposons, en effet, l'existence de ce point vraiment singulier; que k soit sa distance à l'origine; en mettant $x+k+l$ pour x dans la proposée, l'origine se trouvera transportée au-delà de ce point, et plus voisine que lui de l'intersection qu'il s'agit d'assigner; mais toujours à sa gauche, si l est suffisamment petit; l'équation aura donc encore au moins une variation; et rien ne s'opposera à ce qu'on fasse de nouvelles transformées; d'où nous nous croyons fondés à conclure que le point en question est tout-à-fait chimérique.

§. II. *Deuxième partie.*

Je réponds qu'après un certain nombre de transformées, la dernière n'aura plus de variations. En effet, les valeurs de l ne peuvent devenir nulles que lorsque A peut le devenir et A ne peut le devenir dans l'hypothèse où l'équation n'a aucune racine réelle positive, puisque l'axe ne rencontre aucune branche du côté des x positifs. En appelant L la limite supérieure positive; il arrivera un point où l'on aura $l_0+l_1+l_2+\ldots\ldots=L$ ou $>L$; et alors la transformée n'aura plus que des permanences.

On peut démontrer la même proposition, en observant que, dans l'hypothèse dont il s'agit, la proposée est de cette forme

$$(x+\alpha)\{(x\pm y)^2+\Delta^2\}\{(x\pm y')^2+\Delta'^2\}=0 \quad (*) ;$$

et il est clair que la substitution de $x+l_0$, $x+l_0+l_1$, ... pour x doit

finir par rendre tous les termes positifs ; parce que les termes de la série, au lieu de décroître, comme à la rencontre d'une branche, croissent ici et décroissent alternativement, avec A ou y. Ainsi, la disparition des variations avertit bientôt qu'il n'y a point de racines réelles positives à chercher.

Après avoir dissipé les scrupules du géomètre auteur du problème, je vais ajouter quelques remarques propres à éclairer et à simplifier l'usage de la méthode.

Remarque I. Quelques auteurs (LEGENDRE, *Supplément à la théorie des nombres*) disent qu'après avoir trouvé une racine approchée α, il faut diviser la proposée par $x-\alpha$, et chercher les racines du quotient. Ce procédé est très-vicieux ; parce qu'en négligeant le reste de la division, on altère le quotient qui n'est plus exact. Son défaut d'exactitude peut changer des racines imaginaires en racines réelles, égales ou inégales et *vice versâ* ; et l'on sent que cela arrivera sur-tout quand l'axe de la courbe $X=y$ passera fort près d'un sommet. Soit par exemple l'équation

$$x^3-3x-2,0000001=0\ ;$$

on trouvera de suite que 2 en est une racine très-approchée ; car, en la mettant pour x, l'équation devient $-0,0000001=0$; or, si l'on divise la proposée par $x-2$, en négligeant le reste, on trouve pour quotient $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$; d'où on serait conduit à conclure que, outre la racine déjà trouvée, l'équation a deux autres racines réelles, égales à -1 ; tandis que ses deux autres racines sont imaginaires, comme il est aisé de le vérifier.

Si la proposée était $x^3-x-1,9999999=0$, en prenant $x=2$ pour valeur approchée de l'une des racines, ce qui réduit le premier membre à $+0,0000001$, et opérant comme ci-dessus ; on trouverait encore les deux autres racines égales à -1 ; tandis que les trois racines de cette équation sont inégales.

Il serait aisé de former d'autres équations plus élevées où le

même procédé conduirait aux mêmes erreurs, en s'arrêtant, pour la première racine, à un degré donné d'approximation

Notre méthode n'est pas sujette à ces inconveniens; parce qu'après avoir trouvé une première racine, c'est sur la proposée elle-même qu'on opère pour déterminer les autres, en y exécutant seulement un changement d'origine qui n'en altère aucunement les coefficiens.

Remarque II. Dans la pratique, il est beaucoup plus avantageux de mettre de suite $x+l_0+l_1+l_2+$..... pour x dans $X=0$, que de mettre successivement $x+l_0$ pour x dans $X=0$ pour avoir $X_1=0$, $x+l_1$ pour x dans $X_1=0$ pour avoir $X_2=0$, et ainsi de suite, quoique d'ailleurs la chose soit indifférente en théorie. En effet, dans le dernier procédé, les lettres a, b, c,..... changent et acquièrent un nombre de chiffres décimaux toujours croissant; ce qui finit par rendre les calculs impraticables. Et, si, pour parer à cet inconvénient, on prend le parti de négliger des décimales, on retombe dans l'inconvénient beaucoup plus grave d'altérer les transformées, et, par suite, de dénaturer les racines, comme on l'a vu dans la remarque précédente.

Remarque III. Quand on a trouvé la plus petite racine positive avec le degré d'exactitude dont on a besoin; pour découvrir la seconde racine positive, s'il y en a, il faut mettre dans la proposée $X=0$, $x+h$ pour x, h étant un nombre un peu plus grand que la racine trouvée, et tel que la transformée qui en résulte aie une variation de moins que la dernière transformée. Un ou deux tâtonnemens suffisent pour trouver un pareil nombre h; et on est alors assuré de n'avoir dépassé qu'une branche de la courbe, et l'on forme de nouvelles transformées qui procurent une seconde série $l_0+l_1+l_2+$....., au moyen de laquelle la seconde racine se trouve exprimée par $h+l_0+l_1+l_2+$...... On procède de même à la recherche des autres racines; mais il faut remarquer pourtant que tout ceci suppose qu'on a préalablement délivré l'équation de toutes les racines égales qu'elle peut contenir; ce qu'au surplus on peut toujours faire.

Pour avoir les racines négatives, on change $+x$ en $-x$ dans la proposée et on détermine les racines positives de la nouvelle équation, lesquelles, prises avec le signe $-$, sont les racines négatives de la proposée.

Ainsi, voilà un procédé régulier uniforme et simple, qui n'exige qu'un nombre $m-1$ de tâtonnemens, au plus, pour déterminer, d'une manière sure, toutes les racines réelles d'une équation quelconque.

Simplification de la méthode. En réfléchissant sur la précédente méthode, on reconnaît bientôt qu'on peut diminuer considérablement le nombre des transformées, en prenant pour l un nombre plus grand que celui qui est fourni par la règle imparfaite des limites. On avancera ainsi, à grands pas, le long de l'axe; et la diminution progressive du terme A avertira toujours qu'on est près d'une branche; que s'il arrive qu'on l'ait dépassée, la racine cherchée se trouvera par-là même renfermée entre deux limites qu'il sera ensuite très-facile de resserrer, en prenant pour l la fraction $-\frac{A}{B}$, fournie par la dernière transformée. Ceci suppose, au surplus, qu'on n'a dépassé qu'une branche, ce que l'on reconnaîtra par la dernière transformée qui ne doit avoir perdu qu'une variation. S'il arrivait qu'elle en eût perdu plus d'une, on reviendrait sur ses pas, en prenant pour l un nombre plus petit.

Ce procédé a quelque ressemblance avec la méthode ordinaire des substitutions, et avec celle de *Newton*; mais il n'en a pas les inconvéniens. En effet, on sait que deux substitutions qui donnent pour X des résultats de signes contraires peuvent intercepter un nombre impair de racines réelles ou imaginaires; or, par la méthode vulgaire des substitutions, on ne peut point discerner le nombre des racines interceptées, tandis que, par la nôtre, la diminution de A, et les variations perdues, font toujours connaître le nombre des branches dépassées par la translation de l'origine des abscisses : c'est un fanal qui est là pour éclairer tous les écueils.

La circonstance de deux variations perdues mérite un examen particulier; elle a lieu dans trois cas, savoir : 1.° quand l'origine

a dépassé deux branches ; 2.° quand elle a dépassé une ordonnée *minima* ; 3.° quand elle a dépassé deux racines égales. Le troisième cas peut être évité, puisqu'on sait délivrer une équation de ses racines égales. Dans ce cas, A et B, qui ont un diviseur commun, tendent à s'anéantir ensemble, sans y parvenir. Au-delà de ce point, A conserve son signe et B en change.

Le premier cas se distingue du second en ce que, dans le premier, le terme A peut s'approcher de zéro autant qu'on le veut, ce qui n'a pas lieu dans le second. Au reste, pour éviter tout embarras, on regardera comme non avenue la dernière transformée, qui aura perdu deux variations ; on en formera une nouvelle d'après la méthode générale ; c'est-à-dire, en prenant pour l le nombre qui a servi à former la transformée $X_{n-1}=0$ ($X_n=0$ étant celle qu'on abandonne) ; et, en ajoutant à ce nombre la limite inférieure de $X_{n-1}=0$. Alors, si la nouvelle transformée $X_n=0$ perd encore deux variations, on sera assuré que les deux racines douteuses sont imaginaires, et l'on poursuivra l'opération sans s'en inquiéter.

Les bornes de ce mémoire ne me permettent pas de faire le parallèle des diverses méthodes imaginées jusqu'à ce jour ; on verrait que celle tirée de l'équation aux quarrés des différences de l'illustre Lagrange est impraticable dans les degrés un peu élevés, et qu'elle peut exiger des milliers de substitutions dans certains cas. Au surplus, ceux qui désireront de plus amples détails sur ce sujet pourront consulter mon ouvrage intitulé : *Méthodes nouvelles pour déterminer les racines des équations* (*).

(*) Nous aurions beaucoup de réflexions à faire sur tout le contenu de l'article qu'on vient de lire ; et nous avions même préparé, dans cette vue, un grand nombre de notes ; mais, l'auteur ne nous ayant autorisé à le rendre public que sous la condition expresse que nous nous abstiendrions de toutes remarques critiques, nous nous trouvons contraints de prier nos lecteurs de vouloir bien ici suppléer à notre silence. Nous croyons toutefois devoir déclarer, pour l'acquit de notre conscience mathématique, que nous sommes loin de regarder comme suffisamment résolue, par ce qui précède, la question qui avait été proposée. J. D. G.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Solution des problèmes de mathématiques proposés au concours general des colleges royaux de Paris, en 1819;

Par M. Francœur, professeur à la faculté des sciences de Paris.

Les problèmes qu'on a proposés cette année au concours général des colléges royaux de la Capitale m'ont semblé susceptibles de solutions élégantes. Celui de mathématiques élémentaires, en particulier, m'ayant paru faiblement résolu par les concurrens; ce qui tient sans doute à la difficulté du sujet; j'ai pensé que les géomètres pourraient ne pas voir sans quelque intérèt les recherches auxquelles je me suis livré sur ces divers problèmes; et c'est ce qui me détermine à les consigner ici.

Mathématiques élémentaires.

Problème unique. *Par un point donné dans un angle, et également distant de ses deux côtés, mener une droite, terminée à ces mêmes côtés, de telle sorte que le point donné la divise en deux segmens dont la somme des quarrés soit équivalente à un quarré donné?*



Solution. Soient DAE l'angle donné (fig. 1), et O le point donné, également distant des côtés AD, AE ; soit DE la droite cherchée, et soit b le côté du quarré auquel la somme des quarrés des segmens OD, OE doit être équivalente.

Soient menées OB, OC respectivement parallèles à AE, AD ; la figure BC sera un lozange donné, dont nous représenterons le côté par a. Soient, en outre, Ang.DAE$=\alpha$, BD$=x$, CE$=y$.

Le triangle OBD donne $\overline{OD}^2=a^2+x^2-2ax\text{Cos.}\alpha$;

Le triangle OCE donne $\overline{OE}^2=a^2+y^2-2ay\text{Cos.}\alpha$;

on a donc par la condition du problème

$$x^2+y^2-2a(x+y)\text{Cos.}\alpha+2a^2=b^2 . \qquad (1)$$

Les triangles semblables DBO, OCE donnent d'ailleurs

$$\frac{DB}{BO}=\frac{OC}{CE}, \quad \text{c'est-à-dire ,} \quad \frac{x}{a}=\frac{a}{y} ;$$

ou encore

$$xy=a^2 . \qquad (2)$$

Voilà donc deux équations pour déterminer x et y ; et conséquemment le problème pourrait, en toute rigueur, être réputé résolu.

En mettant pour a^2, dans la première équation, sa valeur xy donnée par la seconde, elle prend cette nouvelle forme

$$(x+y)^2-2a(x+y)\text{Cos.}\alpha-b^2=0 ; \qquad (3)$$

d'où on tire

$$x+y=a\text{Cos.}\alpha\pm\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}^2\alpha} .$$

On connaît donc présentement la somme et le produit des deux inconnues,

x, y; ces deux inconnues sont donc racines d'une même équation du second degré, et, puisque $x+y$ a déjà deux valeurs, le problème a quatre solutions. On voit, au surplus, qu'à cause de la symétrie de la figure, ces quatre solutions se réduisent réellement à deux.

Soit abaissée du point B la perpendiculaire BI sur AC, et désignons AI par c; nous aurons

$$c=\mathrm{AI}=a\mathrm{Cos.}\alpha\ ;$$

d'où

$$x+y=c\pm\sqrt{b^2+c^2}\ .$$

Prolongeons IB jusqu'en G, au-delà de B, de manière qu'on ait $\mathrm{IG}=b$; en menant AG, et en représentant par d la longueur de cette droite, nous aurons

$$d=\mathrm{AG}=\sqrt{b^2+c^2}\ ;$$

ce qui donnera

$$x+y=c\pm d\ ;$$

équation fort simple, qu'il faudra combiner avec (2), pour avoir x, y.

L'élimination de y entre ces deux équations donnera, comme l'on sait,

$$x^2-(c\pm d)x+a^2=0\ ,$$

d'où

$$x=\tfrac{1}{2}(c\pm d)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(c\pm d)^2-a^2}\ ;$$

et l'on aurait semblablement

$$y=\tfrac{1}{2}(c\pm d)\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}(c\pm d)^2-a^2}\ .$$

Si l'on porte AG sur AE, de part et d'autre du point A, en H

et H′, on aura $IH=d-c$, $IH'=d+c$. Les moitiés de ces deux distances étant prises pour hypothénuses de deux triangles ayant un des côtés de l'angle droit égal à a, l'autre côté de l'angle droit de ce triangle sera la valeur de notre radical ; et le reste de la construction ne souffrira plus aucune difficulté.

A cause que x, y entrent symétriquement dans les équations du problème, on peut ne prendre que le signe supérieur du radical dans les valeurs de x, y ; on obtiendra ainsi deux solutions du problème desquelles on déduira facilement les deux autres en observant que les quatre droites qui le résolvent doivent être, deux à deux, symétriquement situées par rapport à la droite AO.

A cause de $d>c$, on voit que, lorsque les quatre valeurs de x, y seront réelles et inégales, il y en a toujours deux positives et deux négatives ; ces dernières devant être portées en sens inverse des premières, il s'ensuit qu'il y a alors deux solutions dans l'angle DAE, tandis que les deux autres sont dans ses deux supplémens. La figure 2 représente l'ensemble de ces quatre solutions. Les quatre droites cherchées sont DE, D′E′, de, $d'e'$, tellement situées que l'on a $AD'=AE$, $Ad'=Ae$; et l'on a en outre

$$\overline{OD}^2+\overline{OE}^2=\overline{OD'}^2+\overline{OE'}^2=\overline{Od}^2+\overline{Oe}^2=\overline{Od'}^2+\overline{Oe'}^2=b^2 .$$

Tant que a sera plus petit que $\frac{1}{2}(d-c)$, il sera, à plus forte raison, plus petit que $\frac{1}{2}(d+c)$, et le problème admettra quatre solutions distinctes. Si l'on a $a=\frac{1}{2}(d-c)$, ou

$$2a=\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}^2\alpha}-a\text{Cos.}\alpha ,$$

ou, en chassant le radical,

$$b^2=4a^2(1+\text{Cos.}\alpha)=8a^2\text{Cos}^2\tfrac{1}{2}\alpha=2\overline{AO}^2 ,$$

ou enfin

$$b=AO\sqrt{2} ,$$

les deux droites Od, Od' se confondront dans la seule droite OA, et le problème n'aura plus que trois solutions. Il n'en aura que deux seulement, lesquelles tomberont toutes deux dans l'angle BAC, lorsque a sera compris entre $\frac{1}{2}(d-c)$ et $\frac{1}{2}(d+c)$. Ces deux solutions se réduiront en une seule lorsqu'on aura $a=\frac{1}{2}(d+c)$, ou

$$2a=\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}^2\alpha}+a\text{Cos.}\alpha\ ,$$

ou, en chassant le radical,

$$b^2=4a^2(1-\text{Cos.}\alpha)=8a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha\ ;$$

et les deux droites DE, D′E′ se confondront alors dans une seule perpendiculaire menée à AO par le point O. Enfin, si l'on a $a>\frac{1}{2}(d+c)$, les quatre valeurs de x, y seront imaginaires, et le problème ne pourra plus être résolu.

Dans le cas où l'angle donné α est droit, le lozange ABOC devient un quarré (fig. 3); on a $\text{Cos.}\alpha=0$, $c=0$, $d=b$, et partant

$$x=\pm\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2-a^2}\ ;$$

les quatre racines sont à la fois réelles ou à la fois imaginaires, suivant qu'on a $b>2a$ ou $b<2a$; et, dans le premier cas, deux sont positives et les deux autres négatives. Rien d'ailleurs n'est plus facile alors que de construire le problème.

Si, en effet, du centre O, et d'un rayon égal à $\frac{1}{2}b$ on décrit un arc, coupant AB en L et AC en L′, et qu'ensuite des points L, L′ et avec les rayons respectifs LO, L′O on décrive des demi-cercles terminés, le premier sur AB en D′, d', et le second sur AC en Ee'; en menant par ces points et par le point O les droites DE, D′E′, de, de'; ces quatre droites résoudront le problème.

Au lieu d'éliminer y, entre les équations

$$xy=a^2\ ,\quad x+y=c\pm d\ ,$$

on peut en déduire les valeurs de x, y, par l'intersection des lieux géométriques de la manière suivante :

Si l'on prend l'angle donné pour angle des coordonnées positives, la première de ces deux équations sera celle d'une hyperbole passant par le point O, et ayant pour asymptotes les deux côtés de cet angle ; hyperbole qui se trouve ainsi tout-à-fait déterminée. Quant à l'autre, c'est celle d'une droite déterminant sur les axes, à partir de l'origine, des segmens égaux entre eux et à $c\pm d$. En répétant donc (fig. 4) la même construction que dans la figure 1.re, et portant d'une part IH' sur AC, vers C, de A en Q, et de l'autre IH sur la même droite, en sens inverse, de A en q' ; si des points Q, q' on abaisse sur AO les perpendiculaires QQ', qq', coupant cette droite en R, r, les abscisses des intersections de ces droites avec l'hyperbole seront les quatre valeurs de x. Ainsi, par exemple, dans le cas de la figure, le problème n'admettra que deux solutions, parce que qq' ne rencontre pas la courbe.

Mais on peut, dans cette construction, remplacer l'hyperbole par le cercle. Si, en effet, du quarré de l'équation $x+y=c\pm d$ on retranche le produit de l'équation $xy=a^2$ par $2(1-\text{Cos.}\alpha)=4\text{Sin.}^2\frac{1}{2}\alpha$, il viendra

$$x^2+y^2+2xy\,\text{Cos.}\alpha=(c\pm d)^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha\,;$$

équation d'un cercle rapporté aux deux côtés de l'angle donné comme axes, ayant son centre à l'origine, et son rayon R donné par la formule

$$R=\sqrt{(c\pm d)^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha}\,.$$

Ayant donc construit, comme ci-dessus, les deux droites QQ', qq' (fig. 5), nous aurons, comme alors $AQ=c+d$, $Aq'=c-d$. Si, de plus, nous menons la diagonale BC du lozange, nous aurons $BC=2a\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha$; les deux valeurs de R deviendront donc

$$R=\sqrt{\overline{AQ}^2-\overline{BC}^2}\,,\qquad R=\sqrt{\overline{Aq'}^2-\overline{BC}^2}\,.$$

Soit donc k le centre du lozange. En prolongeant kB, au-delà de B, d'une quantité Bf=Bk ; du point f comme centre et de deux rayons respectivement égaux à AQ, Aq', on décrira deux arcs coupant AO en g, g' ; puis du centre A, et avec les rayons kg, kg', on décrira deux cercles ; dont les intersections respectives avec QQ$'$, qq' auront pour abscisses les valeurs cherchées de x. On voit donc qu'ici, comme dans la figure précédente, le problème n'admettra que deux solutions.

Mathématiques spéciales.

PROBLÈME I. Une droite se meut sur le plan d'un angle donné, dont les côtés ont une longueur indéfinie, de manière à former avec ces côtés un triangle dont l'aire soit constante et donnée ; à quelle courbe appartient le centre de gravité de l'aire de ce triangle, point déterminé par la condition que les droites qui le joignent aux trois sommets du triangle partagent ce triangle en trois parties équivalentes ?

Solution. Soit l'angle donné BAC=α (fig. 6) ; soit BC l'une des positions de la droite mobile ; soit $9a^2$ l'aire constante du triangle variable BAC ; et soit enfin G la position du centre de gravité qui répond à celle de BC.

Soient menées GA, GB, GC ; on devra avoir, par l'énoncé AGB=BGC=CGA=$\frac{1}{3}$BAC=$3a^2$. Soit divisé AC en trois parties égales en K, L ; soient menés GK, GL, BK, et soit prolongée BG jusqu'à la rencontre de AC en O.

Les triangles AKB, AGB sont équivalens, comme étant l'un et l'autre le tiers de BAC ; d'où il suit que KG est parallèle à AB ; GL est donc semblablement parallèle à BC. Les triangles ABC,

KGL sont donc semblables; et, puisque KL est le tiers de AC; GK et GL doivent être respectivement les tiers de BA et BC; donc aussi OK, OL sont les tiers respectifs de OA, OC, ou les moitiés de KA, LC; donc le point O est le milieu de AC; ce qui démontre une propriété connue du centre de gravité, d'après la définition admise dans l'énoncé du problème.

Soient pris les deux côtés de l'angle donné pour les axes des coordonnées; et en conséquence, soient faits $AK=x$, $GK=y$; on aura $AC=3x$, $AB=3y$. Mais l'aire $BAC=\frac{1}{2}AB.AC.\text{Sin}.\alpha$; on aura donc, en substituant,

$$\tfrac{9}{2}xy\text{Sin}.\alpha=a^2, \qquad \text{ou} \qquad xy=\frac{2a^2}{\text{Sin}.\alpha}=M^2.$$

La courbe cherchée est donc une hyperbole dont les asymptotes sont les côtés de l'angle donné, et dont la puissance est M^2, constante connue.

Pour construire cette courbe; on prendra $AE=M$ (fig. 7); on formera le lozange AESD, dont le sommet S sera le sommet de l'hyperbole, ayant pour asymptotes les côtés AD, AE de l'angle donné. La courbe sera donc complètement déterminée. Elle aura d'ailleurs, pour les longueurs de ses demi-diamètres principaux, les diagonales AS et DE du lozange dont il vient d'être question.

Dans le sens strict de l'énoncé du problème, l'autre branche d'hyperbole, comprise dans l'opposé au sommet de l'angle DAE, est inutile à sa solution; mais cette branche, ainsi que les hyperboles conjuguées à la première que l'on construirait dans les deux supplémens de l'angle DAE, devraient entrer en considération, dans le cas où l'on donnerait au problème cet énoncé général:

Deux droites fixes d'une longueur indéfinie se coupant sur un plan sous un angle donné, et une autre droite, aussi indéfinie, étant mue sur ce plan, de manière à former, avec les deux premières, un triangle dont l'aire soit donnée et constante; quel est le lieu du centre de gravité de l'aire de ce triangle?

Sous

Sous cet énoncé général, la courbe, formée de quatre branches hyperboliques, aurait pour équation

$$xy\text{Sin.}\alpha=\pm 2a^2\ .$$

PROBLÈME II. Un angle trièdre fixe étant donné dans l'espace; on suppose qu'un plan indéfini se meut de manière à former avec les trois faces de cet angle trièdre, un tétraèdre dont le volume soit constant et donné; et on demande quel sera le lieu du centre de gravité du volume de ce tétraèdre; point déterminé par cette condition que les quatre tétraèdres qui, y ayant leurs sommets, auront pour bases les quatre faces du tétraèdre dont il vient d'être question, devront être équivalens?

Solution. Soient SAB, BAC, CAS (fig. 8) les trois faces de l'angle trièdre donné, dont le sommet est en A; soit BSC l'une des positions du plan mobile; soit G le centre de gravité qui lui répond; et soit enfin $64a^3$ le volume constant du tétraèdre SABC.

Soit menée SG prolongée jusqu'à la rencontre du plan BAC en O; soit menée AO; et, par le point G, soit menée, parallèlement à l'arête SA, une droite se terminant à AO en D. Soit encore menée BD, prolongée jusqu'à la rencontre de AC en R; soient, en outre, menées DQ, DP, respectivement parallèles à AB, AC, et se terminant à ces droites en Q, P. Menons enfin DC.

A cause de GD parallèle à AS, et conséquemment au plan de la face CAS, les deux tétraèdres qui, ayant cette face pour base commune auront leurs sommets en G et D, devront être équivalens; mais, puisque le premier doit être le quart du tétraèdre total SABC, le dernier doit l'être aussi; donc ADC est le quart de ABC; donc DR est le quart de BR, et conséquemment PA le quart de BA. On prouverait semblablement que QA est le quart de CA; d'où il serait facile de déduire que O est le centre de gravité de l'aire du triangle BAC, que GO est le quart de SO,

et d'obtenir ainsi toutes les propriétés connues du centre de gravité du volume du tétraèdre, en partant de la définition comprise dans l'énoncé du problème.

Soient prises les trois droites AB, AC, AS pour axes des coordonnées. Soient faits AP$=x$, PD$=y$, DG$=z$, nous aurons

$$AB=4x\ ,\quad AC=4y\ ,\quad AS=4z$$

soient, en outre, θ l'angle que fait AS avec sa projection orthogonale sur la base BAC, et soit l'angle CAB$=\varphi$; la hauteur du tétraèdre total SABC sera évidemment SASin.θ; l'aire de sa base étant d'ailleurs $\frac{1}{2}$AB.ACSin.φ; son volume sera

$$SABC=\tfrac{1}{6}AB.AC.AS.Sin.\varphi Sin.\theta\ ;$$

en substituant donc, nous aurons pour l'équation de la surface cherchée, lieu de tous les points G,

$$xyz=\frac{6a^3}{Sin.\varphi Sin.\theta}\ ;$$

surface du troisième ordre.

Pour en étudier la forme, nous remarquerons que, si l'on fait $z=a$, on a $xy=Const.$, équation d'une hyperbole entre ses asymptotes; et l'on pourrait faire la même remarque pour x et y. Ainsi cette surface est telle que toutes ses sections parallèles à l'un quelconque des plans coordonnés sont des hyperboles ayant pour asymptotes les intersections des deux autres plans coordonnés par le même plan; et il n'en faut pas d'avantage pour apercevoir que la nappe de cette surface, comprise dans l'angle trièdre proposé, s'étend à l'infini et a pour plans asymptotiques les faces même de cet angle trièdre par lesquelles elle est d'ailleurs circonscrite.

Cette nappe seule résout le problème, dans le sens strict de son

énoncé ; mais si, au lieu d'un angle trièdre, on considère trois plans indéfinis passant par un même point, et formant 8 angles trièdres autour de ce point, le problème pourra être indistinctement résolu par toutes les nappes de cette surface, lesquelles sont au nombre de *quatre*, et tellement disposées entre elles, que deux ne se trouvent jamais situées dans deux angles opposés aux sommets. Les angles où elles se trouvent sont, 1.° l'angle des x, y, z positifs ; 2.° les trois angles pour lesquels une seule des trois coordonnées x, y, z est positive.

On peut donner à l'équation de cette surface une forme symétrique, en y introduisant les angles α, β que forme l'arète SA avec les arètes AB, AC ; il suffit pour cela de remarquer que, suivant les notes de la *Géométrie* de M. Legendre, on a

$$\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\varphi=2\sqrt{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\varphi)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\varphi)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\beta+\varphi-\alpha)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\varphi+\alpha-\beta)}\;;$$

et d'introduire cette valeur dans l'équation ci-dessus.

Autres solutions des mêmes problèmes ;

Par M. Gergonne.



PROBLÈME I. *Par un point donné dans un angle donné, et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée aux deux côtés de l'angle, de telle sorte que ce point la divise en deux segmens dont la somme des quarrés soit équivalente à une surface donnée ?*

Solution. On voit d'abord que si la droite cherchée n'est point

perpendiculaire à celle qui joint le point donné au sommet de l'angle donné, il pourra y avoir deux solutions du problème dans cet angle même. De plus, si la surface donnée est plus grande que le quarré construit sur la droite qui joint le point donné au sommet de l'angle donné, il y aura encore une solution dans chacun des deux supplémens de l'angle donné. Ainsi, le problème peut avoir quatre solutions, et pas davantage.

Mais, comme, en menant une droite indéfinie par le point donné et par le sommet de l'angle donné, tout se trouve symétrique par rapport à cette droite ; il est facile de prévoir que, bien que du 4.e degré, ce problème ne doit présenter réellement que la difficulté du second.

Soient XOY (fig. 9) l'angle donné ; P le point donné, également distant de ses deux côtés ; AB une droite menée par P qui résout le problème ; et b le côté d'un quarré constant auquel doit être équivalente la somme $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ des quarrés des deux segmens PA, PB.

Soit pris l'angle XOY pour angle des coordonnées positives ; représentons cet angle par γ ; soient les deux coordonnées du point P égales à a ; l'équation de la droite AB sera de la forme

$$y-a=M(x-a)\,; \qquad (1)$$

M étant un coefficient inconnu qu'il s'agit de déterminer conformément à la condition du problème.

Si, dans cette équation, on fait successivement y et x égaux à zéro, les valeurs qui en résulteront pour x et y seront celles des segmens OA, OB ; on trouvera ainsi

$$OA=-\frac{1-M}{M}a\,, \qquad OB=+(1-M)a\,;$$

en conséquence, et d'après la formule qui donne le quarré de la

distance entre deux points, dans le cas des coordonnées obliques, on trouvera facilement

$$\overline{PA}^2=\frac{a^2}{M^2}(1+2M\text{Cos.}\gamma+M^2)\ ,\quad \overline{PB}^2=a^2(1+2M\text{Cos.}\gamma+M^2)\ ;$$

puis donc qu'on doit avoir

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=b^2$$

l'équation qui devra déterminer M sera

$$a^2\left(\frac{1}{M^2}+1\right)(1+2M\text{Cos.}\gamma+M^2)=b^2,$$

ou bien

$$a^2(1+M^2)(1+2M\text{Cos.}\gamma+M^2)=b^2M^2\ . \qquad (2)$$

Cette équation développée devient

$$a^2M^4+2a^2M^3\text{Cos.}\gamma+(2a^2-b^2)M^2+2a^2M\text{Cos.}\gamma+a^2=0\ ;$$

équation complète du quatrième degré ; mais qui, étant réciproque, ne comporte que la difficulté du second. Rien ne serait plus facile d'ailleurs que de se rendre raison de cette circonstance.

En divisant donc tous les termes de cette équation par M^2, elle prendra cette forme

$$a^2\left(M^2+\frac{1}{M^2}\right)+2a^2\left(M+\frac{1}{M}\right)\text{Cos.}\gamma+(2a^2-b^2)=0\ ;$$

et ensuite celle-ci

$$a^2\left(M+\frac{1}{M}\right)^2+2a^2\left(M+\frac{1}{M}\right)\text{Cos.}\gamma-b^2=0\ .$$

Posant donc $M+\frac{1}{M}=z$, nous aurons

$$a^2z^2+2a^2z\text{Cos.}\gamma-b^2=0\ ;$$

d'où

$$z=\frac{-a\text{Cos.}\gamma\pm\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}^2\gamma}}{a}\ .$$

En formant le lozange ODPE, abaissant la perpendiculaire EC sur OD, prolongeant CE vers E, jusqu'en F, de manière que $CF=b$; faisant $OC=c$, $OF=d$, on aura

$$c=a\text{Cos.}\gamma\ ,\qquad d=\sqrt{b^2+a^2\text{Cos.}^2\gamma}\ ,$$

et conséquemment

$$z=\frac{-c\pm d}{a}=\pm\frac{d\mp c}{a}\ ;$$

décrivant donc du point O comme centre, et avec OF pour rayon, le demi-cercle GFG', nous aurons

$$CG=d-c\ ,\qquad CG'=d+c\ ;$$

de sorte que les deux valeurs de z seront

$$z=+\frac{CG}{a}\ ,\qquad z=-\frac{CG'}{a}\ ;$$

mais l'équation $M+\frac{1}{M}=z$, qui revient à

$$M^2-zM+1=0\ ,$$

donne

$$M=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}\ ;$$

substituant donc successivement ces deux valeurs, nous aurons

$$M=\frac{CG\pm\sqrt{\overline{CG}^2-4a^2}}{2a},\quad M=\frac{-CG'\pm\sqrt{\overline{CG'}^2-4a^2}}{2a};$$

et de là, à cause de $OB=(1-M)a$

$$OB=-(\tfrac{1}{2}CG-a)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\overline{CG}^2-a^2},$$

$$OB=+(\tfrac{1}{2}CG'+a)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\overline{CG'}^2-a^2},$$

longueurs faciles à construire, et dont la détermination résout le problème.

PROBLÈME II. Quel est le lieu des centres de gravité des aires de tous les triangles qui ont une aire constante et un angle constant donnés ?

Solution. Soit pris l'angle constant donné, que nous désignerons par γ pour angle des coordonnées positives ; soient X, Y les deux côtés qui le comprennent, et soit T l'aire constante dont il s'agit ; nous aurons, par un théorème connu,

$$XY\text{Sin.}\gamma=2T.$$

Mais, si nous désignons par x, y les coordonnées du centre de gravité, nous aurons, par une propriété connue de ce centre,

$$X=3x,\qquad Y=3y$$

substituant donc, l'équation du lieu cherché sera

$$9xy\text{Sin.}\gamma=2T;$$

équation d'une hyperbole facile à construire, et dont les axes des coordonnées sont les asymptotes.

PROBLÈME III. Quel est le lieu des centres de gravité des

volumes de tous les tétraèdres qui ont un volume constant et un angle trièdre constant donnés ?

Solution. Soit pris l'angle trièdre constant donné pour angle des coordonnées positives ; désignons par α, β, γ ses trois angles plans, et soient X, Y, Z les longueurs des arêtes respectivement opposées ; soit enfin T le volume constant dont il s'agit ; nous aurons, par un théorème connu,

$$XYZ\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}=6T ,$$

Mais, si nous désignons par x, y, z les coordonnées du centre de gravité, nous aurons, par une propriété connue de ce centre,

$$X=4x , \quad Y=4y , \quad Z=4z ;$$

Substituant donc, l'équation du lieu cherché sera

$$64xyz\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}=6T ;$$

équation d'une surface du troisième ordre, ayant les plans coordonnés pour plans asymptotiques (*).

(*) Nous nous abusons peut-être ; mais le problème proposé aux élèves de mathématiques élémentaires nous paraît, à lui seul, plus difficile et plus susceptible de développemens et de détails, que ne le sont ensemble les deux qui ont été proposés aux élèves de mathématiques spéciales. Il se peut, au surplus, que les géomètres qui en ont fait le choix, aient aperçu quelque manière simple de le résoudre, qui aura également échappé à M. Francœur et à nous.

GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Construction de la tangente à une courbe à double courbure ;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales* ;

MONSIEUR,

DANS le traité de *Géométrie descriptive*, récemment publié par M. VALLÉE, l'auteur donne, d'après M. *Hachette*, la solution du problème dont voici l'énoncé :

PROBLÈME. Une ligne courbe quelconque, à double courbure, soumise ou non à la loi de continuité, étant donnée, avec un de ses points ; mener, par ce point, une tangente à cette courbe ?

Pour parvenir à son but, l'auteur, d'après M. Hachette a recours à des surfaces gauches dont la courbe dont il s'agit est l'intersection ; ce qui conduit à une solution si compliquée qu'elle me paraît pouvoir passer pour impraticable. M. Vallée lui-même semble en porter le même jugement, puisqu'il dit (pag. 268) que le procédé qu'il vient de développer est d'un emploi pénible, et que c'est seulement sous le rapport de la géométrie descriptive que M. Hachette a rendu un grand service à la science.

J'ai essayé de résoudre le même problème d'une manière diffé-

rente ; et voici ma solution qui me paraît assez simple pour mériter d'être connue. J'observe d'abord que la courbe et le point par lequel il est question de lui mener une tangente, étant donnés par leurs projections horizontale et verticale, les projections de la tangente par le point donné ne seront autre chose que les tangentes menées aux projections par les projections du même point; de sorte que tout le problème se réduit à savoir mener une tangente à une courbe plane, par un point donné de cette courbe; ce que j'exécute ainsi qu'il suit :

Soit..... $M'''M''M'PM_{,}M_{,,}M_{,,,}$..... (fig. 10) la courbe plane proposée ; et soit P le point par lequel on se propose de lui mener une tangente. Par ce point P soient menées à la courbe une suite de sécantes arbitraires ..... $M'''P$, $M''P$, $M'P$, $M_{,}P$, $M_{,,}P$, $M_{,,,}P$, ..., sur lesquelles soient prises, à partir de cette même courbe et dans le même sens, les longueurs égales et arbitraires .....$M'''N'''$, $M''N''$, $M'N'$, $M_{,}N_{,}$, $M_{,,}N_{,,}$, $M_{,,,}N_{,,,}$, ...; par les points déterminés par ces longueurs, soit fait passer une seconde courbe .... $N'''N''N'P$, $N_{,}N_{,,}N_{,,,}$......, laquelle contiendra le point P comme la première. Si alors de ce point P comme centre, et avec un rayon égal à la longueur constante et arbitraire dont il vient d'être question, on décrit un arc de cercle coupant cette seconde courbe en T ; la droite PT sera la tangente demandée.

Si, en effet, on représente en général par r la distance du point P à un point quelconque de la première courbe, et par a la longueur constante ; la distance du point P au point correspondant de la seconde courbe aura pour expression $a-r$; mais, lorsque la sécante devient tangente, on a $r=0$, donc pour la tangente en P, on doit avoir $PT=a$.

On conçoit que, dans la pratique, il convient de prendre la longueur constante aussi grande que l'espace dont on peut disposer peut le permettre, afin d'écarter le point T le plus possible du point P. Il conviendra aussi de multiplier davantage le nombre des sécantes dans le voisinage de la tangente, afin d'être plus sûr

de la courbure de la seconde courbe en cet endroit. Enfin, on pourra se ménager un moyen de vérification, en portant aussi la longueur constante en sens inverse; ce qui déterminera une nouvelle courbe auxiliaire, et conséquemment un nouveau point T à l'opposite du premier.

Lorsque l'un des points ..... M''', M'', M', M, $M_{/}$, $M_{//}$, $M_{///}$, ..., pris sur la courbe primitive, est très-voisin du point P; comme il arrive, par exemple, dans le cas actuel pour le point $M_{/}$, la direction de la sécante $M_{/}N_{/}$ peut être douteuse; alors, pour la déterminer plus surement, on peut recourir au procédé que voici, et qui porte avec lui sa démonstration.

Des points P et $M_{/}$ comme centres, et avec un même rayon quelconque, plus grand cependant que la moitié de $PM_{/}$, soient décrits quatre arcs se coupant en G, H; puis de ces deux points comme centres et avec un autre rayon arbitraire, plus grand cependant que la moitié de l'intervalle GH, soient décrits deux nouveaux arcs se coupant en K; alors la droite PK sera la sécante demandée.

Nous devons remarquer encore que nos deux courbes sont auxiliaires l'une de l'autre, d'où il suit que, si du point P comme centre, et avec PT pour rayon, on décrit un arc de cercle coupant la courbe primitive en U, la droite PU sera une tangente en P à son auxiliaire.

Il est presque superflu d'observer qu'en enseignant à mener graphiquement une tangente à une courbe plane, par un quelconque de ses points, nous avons aussi enseigné implicitement à lui mener une normale par le même point.

Quoique cette solution semble plus simple et non moins exacte que celle de M. Hachette, il restera toujours à ce géomètre le mérite d'avoir le premier résolu la question. Ce qui peut néanmoins paraître extraordinaire, c'est qu'il ait eu recours à des surfaces courbes, lorsque toutes les quantités données et la quantité cherchée se trouvent situées dans un même plan. Je ne serais pas éloigné

de croire, au surplus, que la solution de M. Hachette, bien analisée, se trouverait revenir à celle qui vient d'être exposée.

Agréez, etc.

Marseille, le 16 de septembre 1819.

HYDRODYNAMIQUE.

Sur le principe d'hydrodynamique relatif à la force d'impulsion des fluides ;

Par M. Narjol.



Au Rédacteur des Annales.

Monsieur,

Une erreur, il me le semble du moins, s'est glissée dans l'introduction que M. *Girard* a mise en tête de sa traduction de l'ouvrage de Smeaton, intitulé : *Recherches expérimentales sur l'eau et les vents, etc.*

Pour donner une idée de la question, j'extrais le passage suivant du livre de M. Girard.

« Que l'on conçoive percé d'un orifice le fond d'un vase rempli d'eau, le fluide s'en échappera et exercera, à sa sortie du vase, une certaine pression contre un plan opposé perpendiculairement à sa direction. »

« Suivant l'opinion de Newton...... le poids capable de faire équilibre à la pression exercée par un courant d'eau à sa sortie d'un vase entretenu constamment plein doit être égal au poids d'un

prisme d'eau de même base que l'orifice, et d'une hauteur double de celle du fluide dans le vase ; et, comme la vitesse d'écoulement des fluides pesans est proportionnelle à la racine quarrée de leur hauteur au-dessus de l'orifice par lequel ils s'écoulent, il s'ensuit, de la théorie de Newton, que l'impulsion d'une veine fluide sur un plan est proportionnelle au quarré de la vitesse dont elle est animée perpendiculairement à ce plan.

« .... Admettons cette proposition. Parent remarqua le premier que, lorsqu'une roue à palettes est mise en mouvement par l'action d'un courant, la vitesse avec laquelle les palettes sont choquées est la différence de la vitesse du courant et de celle de la circonférence, de sorte que c'est au quarré de cette différence que l'impulsion est proportionnelle. »

» Cela posé, Parent chercha l'expression générale de l'effet de la machine, c'est-à-dire, le produit du poids qu'elle élève par la vitesse de ce poids ; il trouva que cette pression est un *maximum*, lorsque la vitesse du centre d'impression des aubes est égale au tiers de la vitesse du courant. »

« MM. Pitot, Bélidor, Maclaurin, Léonard et Albert Euler, et généralement tous les mécaniciens avaient adopté la règle de Parent, relative au *maximum* d'effet des machines hydrauliques, lorsqu'en 1767 le chevalier de Borda publia un mémoire dans lequel il établit que le mouvement d'une roue hydraulique quelconque étant parvenu à l'uniformité, il est nécessaire que l'action instantanée du fluide sur les palettes soit égale à l'action de la pesanteur sur le poids élevé par la roue. La formule à laquelle il parvient, étant traitée par la méthode ordinaire de *maximis* et *minimis*, il en conclut que l'effet de la machine est le plus grand possible, lorsque la vitesse de la roue est égale à la moitié de la vitesse du courant; résultat que l'on obtient en supposant le choc proportionnel à la vitesse simple du fluide. »

» Ainsi, la théorie des premiers géomètres, qui supposaient l'impulsion de l'eau contre les aubes de la roue proportionnelle au quarré de

sa vitesse relative, se trouvait contredite par celle de Borda, qui supposait cette impulsion proportionnelle à la simple vitesse relative du fluide. »

Je me propose de faire voir,

1.° Que Borda n'a point supposé le choc du fluide proportionnel à sa vitesse, et qu'il n'a changé en rien, sur ce point, la théorie de Newton;

2.° Que Parent s'est trompé.

Soit AB (fig. 10) une surface plane immobile, recevant perpendiculairement le choc d'un fluide qui s'échappe de l'orifice DE, supposé très-petit, avec une vitesse de V unités de longueur par secondes de temps, due à une hauteur $CD=h$.

Pour que cette surface ne prenne aucun mouvement, il faut que le poids P qui la retient, et auquel elle est supposée attachée par un fil inextensible P*pppm*, passant sur les poulies p, p, p, fasse équilibre au choc continuel du fluide.

Newton suppose que chaque molécule de fluide, en choquant le plan AB, perd toute sa vitesse et disparaît ensuite; de sorte qu'il n'est plus nécessaire de la considérer.

Désignant par A la grandeur de l'orifice DE et par t le temps, $AV\mathrm{d}t$ est le volume d'eau qui s'écoule pendant le temps $\mathrm{d}t$, et dont le plan AB reçoit le choc. Donc, la densité de l'eau étant prise pour unité, $AV^2\mathrm{d}t$ est la quantité de mouvement infiniment petite que le fluide vient perdre contre le plan, pendant le temps $\mathrm{d}t$, et à laquelle doit faire équilibre celle que le poids P tend à communiquer au même plan dans le même temps. Or, cette dernière est $Pg\mathrm{d}t$, g désignant la vitesse qu'acquiert un corps pesant, au bout d'une seconde de chute; donc

$$Pg\mathrm{d}t=AV^2\mathrm{d}t\,,$$

ou

$$Pg=AV^2\,;$$

ou bien encore, à cause que $V^2=2gh$,

$$P=2Ah\,;$$

équation qui contient le principe de Newton cité par M. Girard.

Soit E la dépense d'eau par seconde, $E=AV$ et $P=EV$: c'est la formule de Borda (*Mémoires de l'académie des sciences*, pour 1767).

Considérons actuellement le cas où le plan AB a une vitesse uniforme V'.

Puisque le plan a une vitesse uniforme, il faut nécessairement que les deux forces qui le sollicitent se fassent équilibre ; mais leurs valeurs ne sont plus les mêmes que dans le cas précédent. En effet, le fluide ne perd pas alors toute sa vitesse par le choc ; mais seulement l'excès de sa vitesse sur celle du plan, c'est-à-dire, $V-V'$; la quantité de mouvement perdue pendant le temps dt par le fluide est donc $AV(V-V')dt$.

La quantité de mouvement que le poids P tend à imprimer au plan est $Pg\,dt$; donc

$$Pg=AV(V-V')=E(V-V') :$$

c'est la formule de Borda, qui conséquemment n'a point supposé le choc du fluide proportionnel à la vitesse simple.

Le poids P, multiplié par la hauteur à laquelle il est élevé pendant une seconde, est ce qu'on nomme l'effet de la machine ; or, cette hauteur est égale à V' ; par conséquent l'effet est

$$PV'=\frac{AVV'(V-V')}{g}\,;$$

il varie donc avec V'. Pour avoir sa valeur *maximum*, il faut différentier $\frac{AVV'(V-V')}{g}$ par rapport à V', et égaler le résultat à zéro. On a par là $V'=\frac{1}{2}V$; telle est donc la valeur de V' qui donne le *maximum* d'effet.

Examinons présentement la formule de Parent.

Suivant lui, lorsque le plan AB a une vitesse uniforme V', il faut, dans l'équation

$$Pg=AV^2;$$

changer V en $V-V'$; ce qui donne

$$Pg=A(V-V')^2;$$

l'effet serait alors égal à

$$\frac{AV'(V-V')^2}{g};$$

expression dont le *maximum* a effectivement lieu lorsque $V'=\frac{1}{3}V$.

D'après la formule

$$Pg=A(V-V')^2,$$

le plan AB recevrait le même choc que dans le cas où il serait immobile et où le fluide n'aurait qu'une vitesse $V-V'$ due à une hauteur h' qui serait donnée par l'équation $(V-V')^2=2gh'$.

Or, ce principe, qui est vrai lorsque l'on considère le choc de chaque molécule fluide isolément, cesse de l'être, quand on prend la somme de tous les chocs particuliers.

En effet, lorsque le fluide a une vitesse Vg, et le plan une vitesse V', la dépense d'eau par seconde est égale à AV; mais, quand le fluide n'a qu'une vitesse $V-V'$, la dépense n'est plus que $A(V-V')$. Donc si, dans ce dernier cas, la quantité de mouvement perdu par le fluide pendant le temps dt est $A(V-V')^2dt$; elle sera dans le premier

$$A(V-V')^2.\frac{AV}{A(V-V')}dt;$$

et l'on aura

$$Pg=AV(V-V');$$

c'est là formule que nous avons trouvée plus haut. Je crois donc avoir complètement prouvé ce que j'avais avancé.

Agréez, etc.

Toulouse, le 16 de septembre 1819.

CATOPTRIQUE.

CATOPTRIQUE.

Recherche du foyer des miroirs sphériques concaves et convexes;

Par M. GERGONNE.

On trouve, dans la plupart des traités d'optique, des formules qui donnent la position du foyer des miroirs sphériques concaves et convexes, pour toutes les situations que peut avoir le point lumineux sur l'axe du miroir; et ces formules ne laissent sans doute rien à désirer, soit sous le rapport de l'exactitude, soit sous celui de la simplicité des considérations qui y conduisent.

Mais j'ai remarqué depuis long temps que l'on pouvait aussi parvenir à ces mêmes formules d'une manière très-élémentaire, par la considération des propriétés des sections coniques; et, comme je n'ai rencontré aucun traité d'optique où la question ait été envisagée sous ce point de vue, j'ai pensé qu'on ne verrait pas sans quelque intérêt ce nouveau genre d'application de la théorie de ces sortes de courbes; persuadé, comme je le suis, que l'un des plus grands charmes attachés à la culture des sciences exactes naît de la parfaite identité entre des résultats obtenus par des méthodes qui, au premier abord, semblent totalement différentes.

LEMME. Trouver le rayon de courbure de l'ellipse et de l'hyperbole à l'un de ses sommets?

Solution. En prenant l'un des sommets pour origine des coordonnées rectangulaires, l'axe et la tangente à son extrémité pour axes des x et des y, respectivement ; représentant de plus l'axe par $2a$ et le paramètre par p ; l'équation commune à l'ellipse et à l'hyperbole sera, comme l'on sait,

$$y^2 = px \mp \frac{p}{2a}x^2 \;;$$

le signe supérieur répondant à l'ellipse, et l'inférieur à l'hyperbole.

On trouvera de plus, pour l'équation de la normale à la courbe par le point x', y',

$$y - y' = -\frac{2ay'}{p(a \mp x')}(x - x') \;;$$

en y faisant $y=0$, on trouvera que cette normale rencontre l'axe des x en un point pour lequel on a

$$x = \frac{p(a \mp x') + 2ax'}{2a} = \tfrac{1}{2}p\left(1 \mp \frac{x'}{a}\right) + x' \,.$$

Cela posé, si l'on mène à la courbe une normale par un point très-voisin du sommet, l'arc de la courbe compris entre ce point et le sommet pourra évidemment être considéré sensiblement comme un arc de cercle ayant son centre à l'intersection de cette normale avec celle du sommet, c'est-à dire, avec l'axe des x, et cette approximation deviendra un résultat tout-à-fait rigoureux, lorsque les deux normales en viendront enfin à coïncider ; donc, la courbe a, à son sommet, une courbure égale à celle du cercle dont le rayon serait ce que devient la valeur de x trouvée en dernier lieu, en y faisant $x'=0$, c'est-à-dire,

$$x = \tfrac{1}{2}p \;;$$

ainsi, dans les deux courbes, *le rayon de courbure au sommet est égal au demi-paramètre.*

PROBLÈME I. Trouver le foyer d'un miroir sphérique concave, pour une position donnée du point lumineux sur l'axe du miroir ?

Solution. Soit r le rayon du miroir et soit d la distance de sa surface au point lumineux. Considérons ce miroir, que nous supposons une très-petite portion de la sphère dont il fait partie, comme un miroir elliptique ; le paramètre de l'ellipse génératrice sera $2r$, et la distance de son sommet à l'un de ses foyers que, pour fixer les idées, nous supposons être le plus éloigné, sera d ; en désignant donc par x la distance du même sommet à l'autre foyer, qui est évidemment le foyer cherché, on aura, par les propriétés connues de la courbe

$$\frac{2ax-x^2}{a}=\tfrac{1}{2}p=r\ ;$$

d'où

$$2ax-x^2=ar\ ;$$

et ensuite

$$d=2a-x\ ;$$

éliminant donc a, entre ces deux équations, il viendra

$$x=\frac{rd}{2d-r}=\frac{\frac{1}{2}rd}{d-\frac{1}{2}r}\ ;$$

formule qui résout le problème.

PROBLÈME II. Trouver le foyer d'un miroir sphérique convexe, pour une position donnée du point lumineux sur l'axe du miroir ?

Solution. Soit r le rayon du miroir, et soit d la distance de sa surface au point lumineux. Considérons ce miroir, que nous supposons une très-petite portion de la sphère dont il fait partie, comme un miroir hyperbolique ; le paramètre de l'hyperbole génératrice sera $2r$, et la distance de son sommet au foyer de l'hyperbole opposée sera d ; en désignant donc par x la distance du même sommet à l'autre foyer, qui est le foyer cherché, on aura, par les propriétés connues de la courbe,

$$\frac{2ax+x^2}{a}:\frac{1}{2}p=r\ ;$$

d'où

$$2ax+x^2=ar\ ;$$

et ensuite

$$d=2a+x\ ;$$

éliminant a, entre ces deux équations, il viendra

$$x=\frac{rd}{2d+r}=\frac{\frac{1}{2}rd}{d+\frac{1}{2}r}\ ;$$

formule qui résout le problème.

Corollaire. On peut, d'après cela, comprendre les deux formules dans la formule unique

$$\pm x=\frac{\frac{1}{2}rd}{d\mp\frac{1}{2}r}\ ;$$

le signe supérieur étant relatif au miroir concave, et le signe inférieur au miroir convexe.

Nous renvoyons aux traités d'optique pour les nombreuses conséquences qu'on peut déduire de ces formules.

QUESTIONS PROPOSÉES.

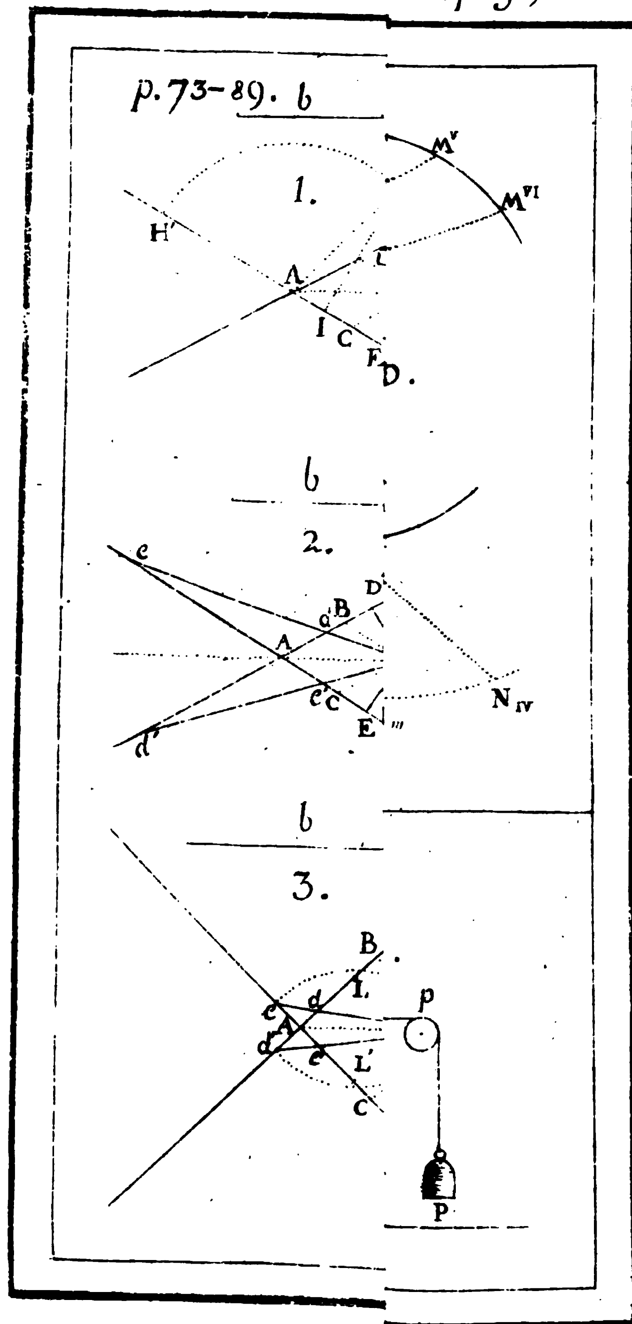
Théorème de Géométrie.

Le lieu des milieux des cordes menées à une section conique quelconque, par un même point quelconque de son plan, est une autre section conique.

Problème de Géométrie.

Quel est le lieu des milieux des cordes d'une section conique donnée quelconque, tangentes à une autre section conique aussi donnée et quelconque ?

n. I, pag. 73 - 101.



J. D. G. fecit.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Extension du problème de FERMAT, *sur les doubles égalités;*

Par M. L. M. P. COSTE, lieutenant au corps royal d'artillerie, ancien élève de l'école polytechnique.

LORSQU'AYANT une fonction algébrique rationnelle d'une ou de plusieurs variables, on demande de trouver des valeurs numériques rationnelles de ces variables dont la substitution dans la fonction la fasse devenir soit une puissance parfaite d'un degré donné, soit un nombre figuré d'un ordre donné, soit, plus généralement, un nombre d'une forme assignée quelconque, cela s'appelle, dans le langage de l'analise indéterminée, résoudre une *égalité simple*.

Mais, lorsqu'ayant plusieurs fonctions algébriques rationnelles des mêmes variables, on se propose de trouver un système de valeurs rationnelles de ces variables qui fasse devenir chacune de ces fonctions un nombre d'une forme déterminée, cela s'appelle résoudre une *double égalité*, une *triple égalité*, etc., suivant le nombre des conditions auxquelles il s'agit de satisfaire, ou, ce qui revient au même, suivant le nombre des fonctions proposées.

Qu'on demande, par exemple, une valeur qui, mise à la place de l'indéterminée x, dans les fonctions

$$24x+6\,,\qquad 14x+3\,,$$



les fasse devenir, toutes deux, des nombres triangulaires ; on proposera un problème dépendant des doubles égalités ; et comme, en faisant $z=3$, ces fonctious deviennent respectivement

$$78=\frac{12.13}{2}, \quad 45=\frac{9.10}{2},$$

on dira que le nombre 3 est un de ceux qui résolvent le problème.

Ces sortes de questions ont été un des objets des nombreux travaux de Fermat sur l'analise indéterminée ; mais vu l'extrême difficulté de la matière, cet illustre géomètre s'est borné au cas où il s'agit de rendre les fonctions proposées des quarrés parfaits ; et encore n'a-t-il considéré que des fonctions entières d'une variable unique, n'excédant pas le second ou tout au plus le quatrième degré. Nous ne nous proposons point ici d'étendre ses méthodes à des fonctions plus nombreuses, ou d'une forme plus compliquée ; mais nous voulons faire voir que le cas où l'on exige que deux fonctions algébriques entières d'une seule variable deviennent, par une détermination convenable de cette variable, deux nombres polygones d'une même espèce donnée quelconque, ou même des nombres d'une forme un peu plus générale, et comprenant ceux-là, comme cas particuliers, se ramène très-facilement au cas où les deux fonctions proposées doivent être des quarrés.

1. Soient, en premier lieu, les deux fonctions du second degré

$$5z^2+8z+78, \quad 4z^2+2z+6;$$

dont les derniers termes sont déjà des nombres triangulaires, dont les racines respectives sont 12 et 3, puisque

$$78=\frac{12.13}{2}, \quad 6=\frac{3.4}{2},$$

et proposons-nous de faire devenir ces fonctions elles-mêmes des nombres triangulaires, par une même valeur de z, différente de

zéro. Pour y parvenir, nous représenterons les racines respectives des deux nombres cherchés par

$$\alpha z+12\,, \qquad \beta z+3\,;$$

et, en exprimant que les deux conditions du problème sont satisfaites, nous aurons les deux équations

$$5z^2+8z+78=\frac{(\alpha z+12)(\alpha z+13)}{2}\,, \quad 4z^2+2z+6=\frac{(\beta z+3)(\beta z+4)}{2}.$$

En chassant les dénominateurs, développant, réduisant et divisant par z, ces deux équations deviendront

$$z\alpha^2+25\alpha-2(5z+8)=0\,, \quad z\beta^2+7\beta-4(2z+1)=0\,;$$

équations d'où on tire

$$\alpha=\frac{-25\pm\sqrt{40z^2+64z+625}}{2z}\,, \quad \beta=\frac{-7\pm\sqrt{32z^2+16z+49}}{2z}\,;$$

et, comme il faut que α et β soient rationnels, on voit que tout se réduit, ainsi que nous l'avions annoncé, à trouver une valeur de z qui rende à la fois des quarrés les deux fonctions

$$40z^2+64z+625\,, \qquad 32z^2+16z+49\,.$$

Ces fonctions deviennent toutes deux des quarrés, savoir; 39^2 et 25^2 en faisant $z=4$; on trouve alors

$$\alpha=\tfrac{7}{4}\,; \qquad \beta=\tfrac{9}{4}\,,$$

ou

$$\alpha=-8\,, \qquad \beta=-9\,,$$

et les racines des nombres triangulaires deviennent ainsi

$$+19, \quad +12;$$

ou bien

$$-20, \quad -13;$$

ce qui donne, pour les nombres triangulaires eux-mêmes

$$\frac{19.20}{2}=\frac{-20.-19}{2}=190, \quad \frac{12.13}{2}=\frac{-13.-12}{2}=78;$$

c'est, en effet, à quoi se réduisent les fonctions proposées lorsqu'on y fait $z=4$.

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et à β, on les résout par rapport à z, il viendra

$$z=-\frac{25\alpha-16}{\alpha^2-10}, \quad z=-\frac{7\beta-4}{\beta^2-8},$$

d'où

$$\frac{25\alpha-16}{\alpha^2-10}=\frac{7\beta-4}{\beta^2-8};$$

relation qui devra constamment exister entre les indéterminées α, β quelque valeur qu'on leur assigne d'ailleurs.

Cette équation de relation, par l'application des méthodes connues, pourra donc servir à trouver une infinité de systèmes de valeurs rationnelles de α et β, desquelles on pourra conclure les valeurs correspondantes de z. Celles d'entre ces valeurs qui rendront αz et βz entiers résoudront le problème; car elles rendront également entiers les nombres $\alpha z+12$ et $\beta z+3$, racines des nombres triangulaires auxquels se réduiront les deux polynomes proposés, par la substitution de la valeur de z.

2. Soient, en second lieu, les deux fonctions

$$18z^2+7z+7, \quad 8z^2+5z+4,$$

ayant, l'une et l'autre, pour coefficient de leur premier terme, le double d'un quarré; et proposons-nous encore de trouver une valeur de z qui les fasse devenir toutes deux des nombres triangulaires. Ici, nous pourrons supposer que les racines de ces nombres sont respectivement de la forme

$$6z+\alpha\,, \qquad 4z+\beta\,;$$

ce qui donnera les équations de condition

$$18z^2+7z+7=\frac{(6z+\alpha)(6z+\alpha+1)}{2}\,, \quad 8z^2+5z+4=\frac{(4z+\beta)(4z+\beta+1)}{2}\,.$$

lesquelles deviendront, en chassant les dénominateurs, transposant et réduisant,

$$\alpha^2+(12z+1)\alpha-2(4z+7)=0\,, \quad \beta^2+(8z+1)\beta-2(3z+4)=0\,,$$

d'où

$$\alpha=\frac{-(12z+1)\pm\sqrt{144z^2+56z+57}}{2}\,, \quad \beta=\frac{-(8z+1)\pm\sqrt{64z^2+40z+33}}{2}$$

tout se réduit donc ici, comme tout-à-l'heure, à trouver une valeur de z qui rende à la fois des quarrés les deux fonctions

$$144z^2+56z+57\,, \qquad 64z^2+40z+33\,.$$

On trouve, par exemple, qu'on remplit ce but en posant $z=3$; il en résulte

$$\alpha=1\,, \qquad \beta=1\,,$$

ou bien

$$\alpha=-38\,, \qquad \beta=-26\,;$$

ce qui donne, pour les racines des nombres triangulaires demandés

$$19, \quad 13,$$

ou bien

$$-20, \quad -14;$$

et conséquemment, pour ces nombres, eux-mêmes

$$\frac{19.20}{2}=\frac{-20.-19}{2}=190, \quad \frac{13.14}{2}=\frac{-14.-13}{2}=91;$$

c'est, en effet, ce que deviennent respectivement nos deux fonctions, lorsqu'on y suppose $z=3$.

Si, au lieu de résoudre nos deux équations par rapport à α et β, on les résout par rapport à z, il viendra

$$z=-\frac{\alpha^2+\alpha-14}{12\alpha-8}, \qquad z=-\frac{\beta^2+\beta-8}{8\beta-6};$$

d'où

$$\frac{\alpha^2+\alpha-14}{6\alpha-4}=\frac{\beta^2+\beta-8}{4\beta-3};$$

équation de relation qui fera connaître tant de systèmes de valeurs rationnelles de α, β, et conséquemment tant de valeurs de z qu'on voudra.

3. S'il arrivait à la fois que, dans l'une et l'autre des deux fonctions proposées, le coefficient du premier terme fût le double d'un quarré, et le dernier terme un nombre triangulaire, on pourrait indistinctement employer l'une ou l'autre des deux méthodes dont nous venons de donner des exemples, et l'on réduirait toujours la question à trouver un nombre qui, substitué à la place de la variable, dans deux fonctions proposées, les fît devenir des quarrés.

4. Si les doubles des deux fonctions proposées étaient, l'un et l'autre, décomposables en deux facteurs ne différant que d'une

unité, il est évident que, quelque valeur entière qu'on attribuât à la variable, ces deux fonctions demeureraient toujours des nombres triangulaires.

5. Les deux fonctions, toujours décomposables en deux facteurs, ne se trouvant pas dans le cas dont il vient d'être question, on peut quelquefois, d'une manière fort simple, obtenir une solution et même plusieurs solutions du problème. Soient, par exemple, les deux fonctions

$$3z^2+13z+4=(z+4)(3z+1), \quad 3z^2+21z+18=(z+6)(3z+3);$$

on écrira les équations

$$\left.\begin{array}{l} 2(\ z+4)-(3z+1)=\pm 1\,, \\ 2(3z+1)-(\ z+4)=\pm 1\,, \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 2(\ z+6)-(3z+3)=\pm 1\,, \\ 2(3z+3)-(\ z+6)=\pm 1\,. \end{array}$$

A cause des doubles signes des seconds membres, les équations de chaque colonne équivalent à quatre ; en les résolvant successivement, on trouve

$$z=6\,, \qquad z=8\,,$$

$$z=8\,, \qquad z=10\,;$$

$$z=\tfrac{3}{5}\,, \qquad z=\tfrac{1}{5}\,,$$

$$z=\tfrac{1}{5}\,, \qquad z=-\tfrac{1}{5}\,,$$

les valeurs 8 et $\frac{1}{5}$ communes aux deux colonnes résolvent évidemment le problème. En faisant, en effet, $z=8$, les deux fonctions deviennent

$$300=\frac{24.25}{2}\,, \qquad 378=\frac{27.28}{2}\,;$$

et en faisant $z=\frac{1}{5}$, elles deviennent

$$\frac{168}{25}=\frac{\frac{16}{5}\left(\frac{16}{5}+1\right)}{2}, \qquad \frac{88}{25}=\frac{\frac{11}{5}\left(\frac{11}{5}+1\right)}{2};$$

mais la dernière valeur, comme fractionnaire, doit être rejetée.

A cause du facteur 3 qui affecte la seconde fonction elle peut encore être décomposée de cette autre manière

$$3z^2+21z+18=(z+1)(3z+18);$$

ce qui fournira les nouvelles équations

$$\left.\begin{array}{l} 2(z+1)-(3z+18)=\pm 1 \\ 2(3z+18)-(z+1)=\pm 1 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} z=-17, \\ z=-15, \\ z=-34, \\ z=-36, \end{array}\right.$$

mais aucune de ces valeurs ne coïncidant avec celles qui répondent à la première fonction, il en résulte que cet autre mode de décomposition ne donne lieu à aucune solution nouvelle.

6. Ce dernier procédé peut être généralisé ainsi qu'il suit. On peut écrire

$$3z^2+13z+4=[\alpha(z+4)].\frac{3z+1}{\alpha}, \quad 3z^2+21z+18=[\beta(z+6)].\frac{3z+3}{\beta};$$

et ensuite

$$2\alpha(z+4)-\frac{3z+1}{\alpha}=1, \qquad 2\beta(z+6)-\frac{3z+3}{\beta}=1;$$

d'où on tire

$$z=-\frac{8\alpha^2-\alpha-1}{2\alpha^2-3}, \qquad z=\frac{12\beta^2-\beta-3}{2\beta^2-3};$$

il s'agira donc de trouver, pour α et β des valeurs telles qu'il en

en résulte pour z une même valeur entière telle que $3z+1$ et $3z+3$ soient respectivement divisibles par α et β. On remplit, en particulier, ces conditions, en posant $\alpha=-1$, $\beta=+1$; il en résulte $z=8$ et

$$\frac{3z+1}{\alpha}=25\,, \qquad \frac{3z+3}{\beta}=-27\,.$$

Tous les autres systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème sont renfermés dans l'équation indéterminée

$$\frac{8\alpha^2-\alpha-1}{2\alpha^2-3}=\frac{12\beta^2-\beta-3}{2\beta^2-3}\,.$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à z, on les résout par rapport à α et β, il viendra

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{24z^2+104z+33}}{2(z+4)}\,, \qquad \beta=\frac{1\pm\sqrt{24z^2+168z+145}}{2(z+6)}\,;$$

et, comme α et β doivent être rationnels, il s'agira de trouver une valeur de z qui rende à la fois des quarrés les deux fonctions

$$24z^2+104z+33\,, \qquad 24z^2+168z+145\,.$$

C'est ce qui arrive, par exemple, en posant $z=8$, ce qui fait devenir ces deux fonctions

$$49^2\,, \qquad 55^2\,;$$

il en résulte

$$\alpha=\frac{1\pm49}{24}\,, \qquad \beta=\frac{1\pm55}{28}\,.$$

7. Supposons enfin que les derniers termes des deux fonctions ne soient pas des nombres figurés, que leurs premiers termes n'aient pas pour coefficiens les doubles de deux quarrés, et qu'en outre

ces fonctions ne soient pas décomposables en facteurs rationnels, et soient, pour exemple, ces deux fonctions

$$23z^2+17z+5\ ;\qquad 19z^2+7z+2\ ,$$

qui sont dans ce cas. Si, par quelque moyen que ce soit, on connaît déjà une solution du problème, rien ne sera plus facile, au moyen de cette solution, que de le ramener au premier des cas précédens.

Dans le cas actuel, par exemple, on résout le problème en posant $z=1$, puisqu'alors les deux fonctions deviennent

$$45=\frac{9\cdot 10}{2}\ ,\qquad 28=\frac{7\cdot 8}{2}\ ;$$

or, en posant $z=v+1$; et substituant, elles deviennent

$$23v^2+63v+45\ ,\qquad 19v^2+45v+28\ ;$$

fonctions qui se rapportent au premier cas. On supposera donc, comme alors, que les racines des deux nombres triangulaires cherchés sont

$$\alpha v+9\ ,\qquad \beta v+7\ ;$$

cela donnera les équations

$$23v^2+63v+45=\frac{(\alpha v+9)(\alpha v+10)}{2}\ ,\quad 19v^2+45v+28=\frac{(\beta v+7)(\beta v+8)}{2}\ ;$$

lesquelles donneront, toutes réductions faites,

$$v\alpha^2+19\alpha-(46v+126)=0\ ,\qquad v\beta^2+15\beta-(38v+90)=0\ ;$$

ou, en remettant pour v sa valeur $z-1$,

$$(z-1)\alpha^2+19\alpha-(46z+80)=0\ ,\quad (z-1)\beta^2+15\beta-(38z+52)=0\ ,$$

d'où

$$\alpha=\frac{-19\pm\sqrt{184z^2+36z+41}}{2(z-1)}\,,\quad \beta=\frac{-15\pm\sqrt{152z^2+56z+17}}{2(z-1)}\,;$$

et, comme α et β doivent être rationnels, on voit que le problème est ramené à trouver une valeur de z qui fasse devenir des quarrés les deux fonctions

$$184z^2+36z+41\,,\qquad 152z^2+56z+17\,;$$

8. Ainsi, en résumé, lorsqu'il n'y a que deux fonctions données seulement, que ces fonctions ne renferment qu'une seule variable, qu'elles sont rationnelles et entières, et qu'enfin elles n'excèdent pas le second degré, nous savons résoudre le problème, 1.° lorsque les derniers termes de nos deux fonctions sont des nombres triangulaires; 2.° lorsque les coefficiens de leurs premiers termes sont les doubles de deux quarrés; 3.° lorsque chacune de ces fonctions est décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré; 4.° enfin, lorsque nous connaissons déjà une solution du problème; et l'on voit de plus que, dans tous les cas, ce problème se ramène toujours à trouver une valeur de la variable qui rende à la fois quarrées deux fonctions rationnelles et entières du second degré de cette variable.

9. Il ne nous reste plus présentement qu'à généraliser nos méthodes et nos formules; mais, au lieu de supposer qu'il s'agit de nombres triangulaires, nous supposerons qu'il s'agit de nombres de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2}\,,$$

où p et q sont deux nombres donnés, formule qui renferme les nombres polygones et beaucoup d'autres, et dont, par analogie, t sera dit la racine.

10. Soient, en premier lieu, les deux formules

$$Az^2+A'z+\frac{pa^2+qa}{2},$$

$$Bz^2+B'z+\frac{pb^2+qb}{2};$$

qu'il faille faire venir des nombres de cette forme ; par une détermination convenable de z. Posons, pour leurs racines,

$$\alpha z+a;$$

$$\beta z+b;$$

nous aurons les équations de condition

$$Az^2+A'z+\frac{pa^2+qa}{2}=\frac{p(\alpha z+a)^2+q(\alpha z+a)}{2},$$

$$Bz^2+B'z+\frac{pb^2+qb}{2}=\frac{p(\beta z+b)^2+q(\beta z+b)}{2};$$

lesquelles donneront, en chassant les dénominateurs, réduisant et divisant par z,

$$pz\alpha^2+(2pa+q)\alpha-2(Az+A')=0,$$

$$pz\beta^2+(2pb+q)\beta-2(Bz+B')=0;$$

d'où on tire

$$\alpha=\frac{-(2pa+q)\pm\sqrt{8p\left(Az^2+A'z+\frac{pa^2+qa}{2}\right)+q^2}}{2pz},$$

$$\beta=\frac{-(2pb+q)\pm\sqrt{8p\left(Bz^2+B'z+\frac{pb^2+qb}{2}\right)+q^2}}{2pz};$$

et, comme α et β doivent être rationnels, la question sera réduite à trouver une valeur de z qui rende à la fois quarrées les deux fonctions

$$8p\left(Az^2+A'z+\frac{pa^2+qa}{2}\right)+q^2,$$

$$8p\left(Bz^2+B'z+\frac{pb^2+qb}{2}\right)+q^2:$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et β, on les résout par rapport à z, il viendra

$$z=-\frac{(2pa+q)\alpha-2A'}{p\alpha^2-2A}, \quad z=-\frac{(2pb+q)\beta-2B'}{p\beta^2-2B};$$

d'où

$$\frac{(2pa+q)\alpha-2A'}{p\alpha^2-2A}=\frac{(2pb+q)\beta-2B'}{p\beta^2-2B}:$$

équation indéterminée qui renferme tous les systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème.

11. Soient, en second lieu, les deux fonctions

$$2pa^2z^2+Az+A',$$

$$2pb^2z^2+Bz+B',$$

qu'il faille rendre de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2};$$

par une détermination convenable de z. En posant, pour les racines respectives,

$$2az+\alpha,$$

$$2bz+\beta,$$

nous aurons les équations de condition

$$2pa^2z^2+Az+A'=\frac{p(2az+\alpha)^2+q(2az+\alpha)}{2},$$

$$2pb^2z^2+Bz+B'=\frac{p(2bz+\beta)^2+q(2bz+\beta)}{2};$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$p\alpha^2+(4paz+q)\alpha+2[(qa-A)z-A']=0,$$

$$p\beta^2+(4pbz+q)\beta+2[(qb-B)z-B']=0;$$

d'où on tire

$$\alpha=\frac{-(4paz+q)\pm\sqrt{8p(2pa^2z^2+Az+A')+q^2}}{2p},$$

$$\beta=\frac{-(4pbz+q)\pm\sqrt{8p(2pb^2z^2+Bz+B')+q^2}}{2p};$$

puis donc que α, β doivent être rationnels, il s'ensuit que la question se trouve réduite à trouver une valeur de z qui rende à la fois des quarrés les deux fonctions

$$8p(2pa^2z^2+Az+A')+q^2,$$

$$8p(2pb^2z^2+Bz+B')+q^2.$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et β, on les résout par rapport à z, il viendra

$$z=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p\alpha^2+q\alpha-2A'}{2p\alpha+(qa-A)},\qquad z=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p\beta^2+q\beta-2B'}{2p\beta+(qb-B)};$$

d'où

$$\frac{p\alpha^2+q\alpha-2A'}{2pa\alpha+(qa-A)}=\frac{p\beta^2+q\beta-2B'}{2pb\beta+(qb-B)};$$

équation indéterminée qui renferme tous les systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème.

12. Soient, en troisième lieu, les deux fonctions

$$(Az+G)(A'z+G'),$$

$$(Bz+H)(B'z+H');$$

qu'il faille rendre de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2},$$

par une détermination convenable de z, en remarquant d'une part que ces deux fonctions sont la même chose que

$$\frac{2\alpha(Az+G).\frac{A'z+G'}{\alpha}}{2},$$

$$\frac{2\beta(Bz+H).\frac{B'z+H'}{\beta}}{2},$$

et que d'une autre pt^2+qt est le produit des deux facteurs, $pt+q$ et t, tels que le premier moins p fois le second est égal à q, nous pourrons poser les deux conditions

$$2\alpha(Az+G)-\frac{p(A'z+G')}{\alpha}=q,$$

$$2\beta(Bz+H)-\frac{p(B'z+H')}{\beta}=q;$$

lesquelles reviennent à

$$2(Az+G)\alpha^2-q\alpha-p(A'z+G')=0\ ;$$

$$2(Bz+H)\beta^2-q\beta-p(B'z+H')=0\ ;$$

et donnent

$$\alpha=\frac{q\pm\sqrt{8p(Az+G)(A'z+G')+q^2}}{4(Az+G)}\ ,$$

$$\beta=\frac{q\pm\sqrt{8p(Bz+H)(B'z+H')+q^2}}{4(Bz+H)}\ ;$$

et ; comme α et β doivent être rationnels, il s'ensuit que tout se réduit à trouver une valeur de z qui rende des quarrés les deux fonctions

$$8p(Az+G)(A'z+G')+q^2\ ;$$

$$8p(Bz+H)(B'z+H')+q^2\ .$$

Si, au lieu de résoudre les deux équations par rapport à α et β, on les résout par rapport à z, on aura

$$z=-\frac{2G\alpha^2-q\alpha-pG'}{2A\alpha^2-pA'}\ , \qquad z=-\frac{2H\beta^2-q\beta-pH'}{2B\beta^2-pB'}\ ;$$

et par suite

$$\frac{2G\alpha^2-q\alpha-pG'}{2A\alpha^2-pA'}=\frac{2H\beta^2-q\beta-pH'}{2B\beta^2-pB'}\ ;$$

équation indéterminée qui renferme tous les systèmes de valeurs de α et β qui peuvent résoudre le problème.

13. Soient enfin les deux fonctions

$$Az^2+A'z+A''\ ,$$

Bz^2,

$$Bz^2+B'z+B'',$$

qu'il faille rendre de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2},$$

par une détermination convenable de z ; et supposons que l'on connaisse uniquement une valeur $z=c$ remplissant cette condition, de telle sorte qu'on ait

$$Ac^2+A'c+A''=\frac{pa^2+qa}{2},$$

$$Bc^2+Bc'^2+B''=\frac{pb^2+qb}{2};$$

en posant $z=v+c$, substituant et ayant égard à ces relations, il viendra

$$Av^2+(2Ac+A')v+\frac{pa^2+qa}{2};$$

$$Bv^2+(2Bc+C')v+\frac{pb^2+qb}{2};$$

opérant donc comme nous l'avons fait dans le n.° 10, la question se trouvera réduite à trouver une valeur de v qui rende quarrées les deux fonctions

$$8p\left[Av^2+(2Ac+A')v+\frac{pa^2+qa}{2}\right]+q^2,$$

$$8p\left[Bv^2+(2Bc+B')v+\frac{pb^2+qb}{2}\right]+q^2;$$

remettant alors pour φ sa valeur $z-c$, et pour

$$\frac{pa^2+qa}{2}, \qquad \frac{pb^2+qb}{2},$$

leurs valeurs respectives

$$Ac^2+A'c+A'', \qquad Bc^2+B'c+B'';$$

la question se trouvera ultérieurement réduite à trouver une valeur de z qui rende quarrées les deux fonctions

$$8p(Az^2+A'z+A'')+q^2,$$

$$8p(Bz^2+B'z+B'')+q^2.$$

14. Ainsi, en supposant toujours les fonctions rationnelles et entières à une seule variable, et n'excédant pas le second degré, nous savons trouver les valeurs de la variable qui rendent les deux fonctions de la forme

$$\frac{pt^2+qt}{2},$$

1.° lorsqu'elles ont, l'une et l'autre, leur dernier terme de cette forme; 2.° lorsque le coefficient du premier terme de l'une et de l'autre est également le double d'un quarré multiplié par p; 3.° lorsque les deux fonctions sont décomposables en deux facteurs rationnels du premier degré; 4.° enfin, lorsque l'on connaît déjà une valeur de la variable qui résout le problème.

15. Dans tous ces divers cas, le problème se trouve toujours ramené à trouver une valeur de la variable qui rende quarrées deux nouvelles fonctions de cette variable, lesquelles sont, comme les premières, des fonctions rationnelles et entières du second de-

gré seulement; et, ce qui est digne de remarque, c'est que ces nouvelles fonctions sont constamment les produits des premières par $8p$, auxquels on a ajouté q^2. Ainsi, par exemple, dans le cas des nombres triangulaires, où l'on a $p=q=1$, ces nouvelles fonctions surpassent d'une unité les produits des premières par 8, comme on le voit par les exemples numériques que nous avons d'abord donnés.

16. C'est là, au surplus, un fait qui pouvait être prévu, et dont il est très-aisé de se rendre raison. Soit, en effet, Z une fonction quelconque de z; si elle est de la forme dont il s'agit, on pourra poser

$$Z=\frac{pt^2+qt}{2};$$

t étant une nouvelle fonction de z; or, de là, on tire

$$8pZ+q^2=4p^2t^2+4pqt+q^2=(2pt+q)^2;$$

d'où l'on voit qu'alors $8pZ+q^2$ est nécessairement un quarré.

17. Et réciproquement, si $8pZ+q^2$ est un quarré; si, par exemple, on a

$$8pZ+q^2=v^2,$$

on en tirera

$$Z=\frac{v^2-q^2}{8p},$$

posant alors $v=2pt+q$, ce qui est permis et donne $t=\frac{v-q}{2p}$, il viendra, en substituant et réduisant,

$$Z=\frac{pt^2+qt}{2};$$

c'est-à-dire, qu'alors Z se trouvera de la forme demandée.

18. Ces considérations, fort simples d'ailleurs, nous permettent d'étendre notre théorie à un nombre quelconque de fonctions quelconques, renfermant un nombre quelconque de variables. Soient, par exemple,

$$\begin{array}{ll} f(x, y, z, \ldots\ldots), & \dfrac{pt^2+qt}{2}, \\ f'(x, y, z, \ldots\ldots), & \dfrac{p't^2+q't}{2}, \\ f''(x, y, z, \ldots\ldots), & \dfrac{p''t^2+q''t}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

et supposons qu'on demande un système de valeurs de $x, y, z, \ldots$ qui, substituées dans les fonctions de la première colonne, les fassent devenir des nombres de la forme de ceux qui leur correspondent dans la seconde ; on voit que tout se réduira à trouver un système de valeurs de $x, y, z, \ldots$ dont la substitution fasse devenir des quarrés toutes les fonctions

$$\begin{array}{l} 8p\,.f(x, y, z, \ldots\ldots)+q^2, \\ 8p'.f'(x, y, z, \ldots\ldots)+q'^2, \\ 8p''.f''(x, y, z, \ldots\ldots)+q''^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

problème que malheureusement on sait ne résoudre que dans des cas très-limités. On voit, au surplus, que, si les premières fonctions sont rationnelles et entières, les dernières le seront également, et du même degré qu'elles.

19. Soient, par exemple, les trois fonctions

$$5xy+3x+2y+3\,,$$

$$3xy+4x+y+7\,,$$

$$2xy+7x+4y+13\,;$$

et supposons qu'on demande un système de valeurs de x et y qui rende la première un nombre triangulaire, la seconde un nombre quarré, et la troisième un nombre pentagone ; comme ces trois sortes de nombres sont respectivement des trois formes

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{t^2+t}{2}\,; \\[2ex] \dfrac{2t^2}{2}\,, \\[2ex] \dfrac{3t^2-t}{2}\,, \end{array}\right\} \text{ auxquelles répondent } \left\{\begin{array}{l} p=1\,,\; q=1\,; \\[2ex] p'=2\,,\; q'=0\,, \\[2ex] p''=3\,;\; q''=-1\,; \end{array}\right.$$

tout se réduira à trouver un système de valeur de x et y qui rende quarrées les trois fonctions

$$8(5xy+3x+2y+3)+1=40xy+24x+16y+25\,,$$

$$16(3xy+4x+y+7)=48xy+64x+16y+112\,;$$

$$24(2xy+7x+4y+13)+1=48xy+168x+96y+313\,;$$

et, comme on y parvient en posant $x=2$, $y=3$, qui les font respectivement devenir 19^2, 24^2, 35^2, il s'ensuit que ces valeurs

de x et y résolvent la question proposée. Leur substitution dans nos trois fonctions donne, en effet, $45=\frac{9.10}{2}$, $36=6^2$, $51=\frac{6.(3.6-1)}{2}$, nombres de la forme demandée.

20. Ceci peut donner des ouvertures pour traiter d'autres questions du même genre, mais d'un ordre plus élevé (*).

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Dissertation sur un cas singulier que présente l'approximation des racines des équations numériques ;

Par M. Gergonne.

Lorsque, par un moyen quelconque, on est parvenu à la valeur approchée de l'une des racines réelles d'une équation numérique, il est d'usage de diviser son premier membre par le facteur binome qui répond à cette racine. En négligeant le reste, qui est d'autant

(*) En nous adressant le présent mémoire, M. Coste nous prie de relever une inexactitude qu'il a commise à la page 262 du VIII.e volume de ce recueil, laquelle consiste à avoir attribué à Pascal la découverte de la propriété de l'hexagone circonscrit à une section conique, qui est réellement due à M. Brianchon. Pascal n'a découvert que la propriété de l'hexagone inscrit. A la vérité, il est aujourd'hui très-aisé de passer de chacun de ces deux théorèmes à l'autre ; mais, au temps de Pascal, où la théorie des pôles n'était pas connue, ce n'était point une chose aussi facile qu'elle peut le paraître présentement.

J. D. G.

plus petit que la racine dont il s'agit est plus approchée, le quotient, égalé à zéro, est l'équation qui doit faire connaître les autres racines de la proposée.

Soit, par exemple, l'équation du troisième degré.

$$x^3-10x^2+31x-29=0\ ,$$

dont on trouve, pour l'une des racines, la valeur approchée $x=1{,}753$; en divisant son premier membre, mis, pour plus de commodité, sous cette forme

$$x^3-10{,}000x^2+31{,}000000x-29{,}000000000\ ,$$

par le binome $x-1{,}753$, négligeant le petit reste 0,000105223, et égalant le quotient à zéro, on aura, pour déterminer approximativement les deux autres racines, l'équation du second degré

$$x^2-8{,}247x+16{,}543009=0\ ,$$

laquelle, étant résolue, donnera en outre

$$x=4{,}966\ , \qquad x=3{,}281\ .$$

Soit, plus généralement, pour le troisième degré, l'équation

$$x^3+px^2+qx+r=0\ ,$$

de laquelle on ait déduit $x=a$, pour une des valeurs approchées de x, en divisant son premier membre par $x-a$, le reste de la division sera, comme l'on sait,

$$a^3+pa^2+qa+r\ ;$$

or, dire que a est une valeur approchée de x; c'est dire; en d'autres termes, que a, substituée dans le premier membre, le réduit presque à zéro, ou encore que le résultat de sa substitution dans le premier membre est un nombre fort approchant de zéro; puis donc que ce résultat est précisément le reste de notre division, il en faut conclure que ce reste est presque nul, que conséquemment le quotient est presque exact, et qu'ainsi, égalé à zéro, il fera sensiblement connaître les autres racines de l'équation. On a, de cette manière, l'équation du second degré

$$x^2+(a+p)x+(a^2+pa+q)=0\ ,$$

laquelle donne, pour les valeurs approchées des deux autres racines,

$$x=\frac{-p-a\pm\sqrt{(p^2-4q)-2pa-3a^2}}{2}\ .$$

Ce que nous venons de dire du troisième degré s'étend, comme l'on sait, à tous les autres; avec cette seule différence qu'on n'y trouve plus les mêmes facilités pour résoudre l'équation privée de la racine déjà obtenue. Mais, dans tous les cas, ce procédé a l'avantage de réduire d'une unité le degré de l'équation à résoudre; et, si l'on considère combien s'accroît la difficulté de la résolution d'une équation à mesure que son degré s'élève, on sentira que cet avantage n'est point du tout à dédaigner. Aussi, le procédé que nous venons d'indiquer est-il presque universellement indiqué par tous ceux qui ont écrit sur cette matière. Cependant, dans un article récent du présent volume, un de nos collaborateurs a cru pouvoir élever des doutes sur la légitimité de cette opération dans certains cas; et, comme les motifs qu'il allègue, à l'appui de son opinion, ont quelque chose de spécieux, nous avons pensé qu'il ne serait point hors de propos de prendre la plume pour dissiper ses

ses scrupules et détourner peut-être quelques-uns de nos lecteurs de la tentation de les partager.

Soit l'équation du troisième degré

$$x^3-3x+2000001=0\ ,$$

dont une des racines est sensiblement égale à l'unité, puisque la substitution de cette valeur dans le premier membre, à la place de x, réduit ce premier membre, sinon à zéro, du moins au très-petit nombre 0,000001. Divisons donc, suivant le procédé admis, le premier membre de notre équation par le binome $x-1$, en négligeant le reste et égalant le quotient à zéro, nous aurons, pour déterminer approximativement les deux autres racines, l'équation

$$x^2-x-2=(x-1)(x+2)=0\ ;$$

de sorte que ces deux racines sembleraient être $+1$ et -2; tandis qu'il est patent, par l'inspection de l'équation proposée, qu'elle ne saurait avoir qu'une racine réelle seulement.

La même chose arriverait encore, si l'on partait de la racine approchée -2; en divisant, en effet, par $x+2$, négligeant le reste et égalant le quotient à zéro, on tomberait, pour la détermination des deux autres racines, sur l'équation

$$x^2-2x+1=(x-1)^2=0\ ,$$

qui les ferait paraître réelles et égales.

On sent qu'à l'inverse, il ne serait pas difficile de former une équation du troisième degré qui, ayant ses trois racines réelles, donnerait néanmoins, en divisant son premier membre par le facteur binome qui répond à la valeur approchée de l'une d'entre elles,

et négligeant le reste, un quotient du second degré qui, égalé à zéro, ferait paraître imaginaires les deux autres racines de cette équation; et il n'est pas besoin de dire qu'il en serait de même, à plus forte raison, dans les degrés plus élevés. Que doit-on donc penser d'après cela, ajoute-t-on, d'un procédé qui tend à confondre et à faire prendre les uns pour les autres des êtres aussi essentiellement hétérogènes que le sont les quantités réelles et les quantités imaginaires, et à faire paraître possible un problème qui ne l'est pas et *vice versâ*? Tout cela est fort spécieux, nous l'avouerons si l'on veut; mais nous espérons que l'on demeurera tout-à-l'heure bien convaincu qu'il n'y a là qu'une pure illusion.

Qu'est-ce, en effet, que résoudre rigoureusement une équation, ou, plus généralement, un nombre quelconque d'équations, entre tant d'inconnues qu'on le voudra? Tout le monde tombera d'accord que c'est trouver, pour les inconnues que ces équations renferment, un ou plusieurs systèmes de valeurs qui, mises pour ces inconnues dans ces mêmes équations, rendent les deux membres de chacune d'elles rigoureusement égaux, et réduisent conséquemment leurs premiers membres à zéro, si, comme nous le supposons, les seconds le sont déjà. Que ces valeurs soient réelles ou imaginaires, égales ou inégales, c'est ce qui importe fort peu, à considérer les choses sous un point de vue purement analitique et abstrait. Il arrivera seulement que le problème qui aura conduit à ces équations sera tantôt possible et tantôt impossible, aura tantôt un plus grand et tantôt un moindre nombre de solutions.

Qu'est-ce ensuite que résoudre ces mêmes équations par approximation? On conviendra encore que c'est trouver des systèmes de valeurs des inconnues qui, sans réduire leurs premiers membres à zéro, les rendent du moins très-petits; et plus ils les rendront petits et plus aussi ces valeurs seront approchées; elles pourront d'ailleurs, comme dans le premier cas, être indistinctement réelles ou imaginaires, égales ou inégales.

Mais il y a, entre ce cas et le précédent, cette différence essen-

tielle que, tandis que, dans le premier, le nombre et la nature des systèmes de valeurs des inconnues se trouvent tout-à-fait limités et déterminés, ici, au contraire, un système de valeur peut fort bien être remplacé par un autre, qu'on pourra regarder comme lui étant équivalent, en ce sens qu'il aura comme lui la propriété de faire devenir les premiers membres très-petits, par sa substitution à la place des inconnues; or, il pourra fort bien se faire que telle inconnue qui était réelle dans le premier système, soit au contraire imaginaire dans le second, et *vice versâ*, sans que pour cela l'un ou l'autre de ces deux systèmes cesse d'être admissible.

Ainsi, pour ne pas sortir du second degré, s'il n'est question seulement que de résoudre, d'une manière approximative, l'équation

$$x^2-2x+1=(x-1)^2=0,$$

on le pourra également soit en donnant à x ces deux valeurs réelles et inégales

$$x=1{,}001\,; \qquad x=0{,}999\,;$$

soit, en admettant ces deux valeurs imaginaires

$$x=1\pm0{,}001\sqrt{-1}\,;$$

car, si les unes et les autres ne réduisent pas le premier membre à zéro, elles le rendent du moins très-petit.

Il faut donc nécessairement conclure de tout ceci qu'un procédé approximatif ne saurait être réputé vicieux par cela seul qu'il présentera, sous forme réelle, des valeurs qui, rigoureusement parlant, sont imaginaires, ou, sous forme imaginaire,

des valeurs proprement réelles ; l'essentiel, dans tout ceci, est que soit les unes soit les autres valeurs rendent sensiblement égaux à zéro les premiers membres des équations qu'elles seront destinées à résoudre d'une manière approximative.

Mais, dira-t-on, s'il s'agit de faire l'application de ces résultats à des problèmes de géométrie, les mutations dont il vient d'être question ne deviendront-elles pas tout-à-fait intolérables ? Peut-on admettre qu'un problème, lors même qu'il est question seulement de le résoudre par approximation, soit possible ou impossible, à volonté, et soit susceptible aussi à volonté, tantôt d'un plus grand et tantôt d'un moindre nombre de solutions ? Que si, au contraire, ces considérations ne sont recevables que sous un point de vue purement théorique et abstrait, de quelle utilité peuvent-elles être, puisqu'en dernière analise la théorie n'a raisonnablement de prix que comme servant de guide de la pratique ?

Nous répondrons à ces objections en faisant voir qu'au contraire rien n'est plus propre que les considérations géométriques à confirmer et à mettre dans tout son jour la doctrine que nous venons d'établir ; et cela est même si vrai, que ce sont précisément des considérations géométriques qui nous ont mentalement dirigés dans tout ce qui précède.

Pour prendre un exemple fort simple, considérons le problème où il s'agit de mener, par un point donné, une tangente à un cercle ; chacun sait que ce problème présente trois cas ; qu'il a deux solutions lorsque le point donné est extérieur au cercle ; que ces deux solutions se réduisent à une seule, lorsque ce point est sur la circonférence ; et qu'enfin il devient impossible lorsque ce même point lui est intérieur.

Voilà pour ce qui concerne une théorie rigoureuse et abstraite ; mais supposons que, sur le terrain, un praticien ait à mener, par un point donné, une tangente à un cercle ; et supposons de plus que le point donné soit si voisin de la circonférence qu'il soit permis

de douter s'il est en dedans ou en dehors, ou s'il est précisément sur elle. Notre praticien hésitera-t-il de joindre le point donné au centre du cercle par une droite, de mener par le même point une perpendiculaire à cette droite, et de réputer tangente cette perpendiculaire qui pourtant sera peut-être une sécante ou une droite étrangère au cercle ? et serait-on recevable à lui objecter que peut-être sa prétendue tangente n'existe pas, ou qu'au lieu d'une tangente il en existe deux par le point donné ? A la vérité, il pourrait en être ainsi pour qui y regarderait de plus près ; mais cela se réduit à dire que des racines qui, pour un certain degré d'approximation, peuvent, sans inconvénient, être réputées égales, peuvent, pour un degré d'approximation plus parfait, devenir inégales ou imaginaires ; et c'est justement ce que nous nous sommes proposés d'établir.

Il en ira à peu près de même, lorsqu'il sera question de mener à un cercle une tangente parallèle à une droite donnée ; et à moins d'une précision à laquelle la pratique ne saurait jamais se promettre d'atteindre, il arrivera le plus souvent qu'au lieu d'un seul point commun avec le cercle, on en aura deux réels ou deux imaginaires ; mais, pour cela, le problème n'en sera pas moins réputé résolu.

On voit par là que, dans l'approximation pratique des racines des équations numériques, on peut fort bien se dispenser du recours à l'équation aux quarrés des différences de ces racines. Toutes les fois, en effet, que, par des substitutions successives, on sera parvenu à une valeur de x qui, mise à la place de cette inconnue, dans le premier membre de la proposée, rendra ce premier membre très-petit ; quand bien même le résultat obtenu ne se trouverait environné que d'autres résultats de mêmes signes que lui, on n'en sera pas moins autorisé, et cela sans craindre d'erreur sensible, à admettre dans l'équation deux racines égales au nombre substitué, quoiqu'en rigueur ces deux racines puissent fort bien être inégales ou même imaginaires. Cela revient, en effet, à supposer qu'une courbe parabolique qui a l'un de ses sommets très-voisin de l'axe

des x, a cette droite pour tangente à ce sommet, ce qui est incontestablement permis, lorsqu'il n'est question que de procédés purement approximatifs.

Une conséquence forcée de tout ceci c'est que les imaginaires ne sont pas des êtres aussi essentiellement différens des quantités réelles qu'on est généralement dans l'usage de le supposer; que les uns et les autres sont comparables à certains égards; et qu'on peut, sans pécher contre la rigueur du langage mathématique, dire, d'une quantité imaginaire, qu'elle diffère plus ou moins d'une quantité réelle, tout comme on le dirait de deux quantités réelles que l'on comparerait l'une à l'autre; c'est sans doute ce qu'avait déjà voulu insinuer M. le professeur *de Maizières* à la page 373 du I.er volume de ce recueil; et c'est ce que confirme encore la nouvelle théorie des imaginaires exposée par MM. Français et Argand, aux pages 61, 133, 222 et 364 du IV.e volume des *Annales*; et si, dans ce qui précède, nous avons préféré les considérations les plus communes aux secours qu'aurait pu nous fournir une théorie encore contestée; il n'en est pas moins vrai que les conclusions auxquelles nous sommes parvenus, pourraient, à leur tour, venir à l'appui de cette théorie, et lui donner une nouvelle sanction.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'Analise.

On sait que, pour qu'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ait ses racines rationnelles, il faut et il suffit que ses coefficiens a, b, c satisfassent à la condition unique $b^2-4ac=t^2$, t étant un nombre rationnel quelconque.

Mais, il doit exister des conditions analogues pour la rationnalité des racines dans les degrés supérieurs; conditions de la recherche desquelles aucun géomètre ne paraît s'être encore occupé.

En conséquence, on propose d'assigner la condition ou les conditions de rationnalité des racines de l'équation du troisième degré

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ ?$$

Problèmes de situation.

I. Peut-on disposer circulairement m nombres consécutifs de la suite naturelle, à commencer par un quelconque, de telle manière que, dans l'arrangement circulaire résultant, la différence de deux termes consécutifs ne soit jamais plus grande ou bien ne soit jamais moindre qu'un nombre donné n ? et, si cela est possible, de combien de manières différentes peut-on l'exécuter ?

II. Etant donnés m groupes de lettres différentes entre elles

d'une même couleur dans chaque groupe et de couleur différente et les mêmes d'un groupe à l'autre ; et les lettres étant dans chaque groupe au nombre de n ; est-il possible de disposer toutes ces lettres circulairement de telle sorte qu'en aucun point de l'arrangement on ne rencontre consécutivement ni deux lettres de même sorte ni deux lettres de même couleur ? et, si cela est possible, de combien de manières différentes peut-on l'exécuter ?

Problèmes de Géométrie.

I. Un point étant donné dans un angle droit trièdre, et également distant de ses trois faces ; on propose de conduire par ce point un plan tellement dirigé que sa partie interceptée dans l'angle trièdre dont il s'agit, soit un triangle semblable à un triangle donné ?

II. Construire graphiquement, pour l'un quelconque des points d'une courbe plane donnée, soumise ou non à la loi de continuité, le centre de courbure de cette courbe ?



STATIQUE.

Essai sur quelques cas particuliers d'attraction ;

Par M. GERGONNE.



On trouve à la fin du second volume de la traduction du livre des *PRINCIPES*, par Madame du Chatelet, une suite de recherches relatives à l'attraction exercée, dans diverses hypothèses, par des corps symétriques, sur un point symétriquement situé par rapport au corps attirant.

Tout récemment, dans un mémoire présenté à l'académie de Turin, M. le professeur Plana a traité, dans le même genre, des questions plus générales et plus difficiles, et dont la solution exige toutes les ressources de la haute analise.

Mais personne ne paraît s'être encore occupé jusqu'ici d'un autre genre de questions qui ont quelque analogie avec celles-là, et qui ne semblent pas moins dignes d'intérêt : ce sont celles où il s'agit de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle polyèdre solide, homogène et indéfini, sur un point situé à son sommet. Ce problème comprend évidemment, comme cas particulier, celui où l'on demanderait d'assigner l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle dièdre, solide, homogène et indéfini, sur l'un quelconque des points de son arète. Il comprend donc également celui où il s'agirait de l'attraction exercée par un corps homogène terminé d'une part par une surface plane indéfinie, et lui-même d'une étendue indéfinie au-delà

de cette surface, sur l'un quelconque des points de cette même surface.

Ces divers cas d'attraction ont cela de particulier et de très-remarquable qu'ils permettent d'assigner la direction et même l'intensité relative de l'action totale exercée par le corps attirant sur le point attiré, indépendamment de la loi d'attraction ; c'est-à-dire, sans qu'on ait préalablement besoin de statuer sur la fonction de la distance qui mesure cette force, ni même de songer, en aucune sorte, à la nature de cette fonction. Que l'on conçoive, en effet, l'angle polyèdre attirant partagé en une infinité d'autres infiniment petits, de même sommet que lui et équivalens en capacité ; c'est-à-dire, de nature à intercepter des portions équivalentes d'une sphère d'un rayon quelconque, ayant son centre à leur sommet commun. Ces angles polyèdres partiels exerceront sur le point attiré, et chacun d'eux suivant sa direction, une infinité d'actions infiniment petites, d'une même intensité ; la direction de la résultante ne dépendra donc uniquement que des directions des composantes, c'est-à-dire, de la figure de l'angle polyèdre total ; et son intensité sera simplement proportionnelle à celle de chacune de ces composantes.

On peut remarquer, au surplus, que ce cas est exactement le même que celui où tous les points de diverses portions d'une même surface sphérique exerceraient des actions égales sur son centre. Il est clair, en effet, que l'action totale de chacune de ces portions de surface sphérique ne dépendrait nullement, quant à sa direction, de l'action commune exercée par chacun de ses points ; et que le rapport d'intensité des actions totales de deux de ces portions n'en dépendrait pas davantage.

Et par là on voit aussi que, dans le cas où l'intensité de la force attractive dépendrait de la masse des molécules attirantes, il n'y aurait encore rien de changé si le corps attirant, au lieu d'être homogène, était d'une densité variable, pourvu seulement que sa

densité fût constante, pour chacune des couches sphériques concentriques, ayant le point attiré pour centre commun.

Tout se passerait donc encore de la même manière, si l'action exercée par l'angle polyèdre, solide et indéfini était de ces actions dont l'étude de la nature nous offre sans cesse des exemples, et dont le caractère propre est de cesser d'être sensibles à une distance sensible du contact. Le seul changement qui surviendrait alors est que la condition d'une étendue indéfinie cesserait d'être de rigueur pour l'angle polyèdre qui pourrait, dans ce cas, être limité, du côté opposé à son sommet par une surface quelconque; pourvu seulement que les arètes concourant à ce sommet fussent toutes d'une longueur sensible.

On voit donc que, dans cette dernière hypothèse, si l'on conçoit un polyèdre fini et homogène, de figure quelconque; 1.° l'action de ce polyèdre sur un point situé dans l'intérieur de l'une quelconque de ses faces sera la même que si cette face se prolongeait indéfiniment, et que le solide fût d'une épaisseur indéfinie : cette action sera donc la même pour toutes les faces, du moins tant que le point attiré demeurera à une distance sensible des arètes du polyèdre

2.° L'action de ce polyèdre sur un point de l'une quelconque de ses arètes sera la même que si les faces de l'angle dièdre, auquel cette arète se trouve appartenir, étaient indéfiniment prolongées; pourvu toutefois que le point attiré demeure à une distance sensible des sommets du polyèdre; mais ici l'intensité de la force attractive variera, suivant le plus ou le moins d'ouverture de l'angle dièdre; de sorte qu'elle ne sera généralement la même que pour des arètes appartenant à des angles dièdres égaux.

3.° Enfin, l'action exercée par ce polyèdre sur l'un quelconque de ses sommets sera la même que si toutes les faces concourant à ce sommet, et conséquemment toutes les arétes qui s'y terminent, s'étendaient indéfiniment du côté opposé; mais encore ici l'action

pourra différer de sommet à autre, suivant la figure et le plus ou le moins d'ouverture de chaque angle polyèdre.

Nous avons donc ici à nous occuper principalement, 1.° de l'attraction exercée par un corps homogène, indefini d'une part et terminé de l'autre par une surface plane indéfinie, sur un point de cette surface; 2.° de l'attraction exercée par un angle dièdre solide, homogène et indéfini, sur un point de son arète; 3.° enfin, de l'attraction exercée par un angle polyèdre solide, homogène et indefini, sur son sommet; ou, ce qui revient au même, nous avons à nous occuper de la recherche de l'intensité et de la direction de l'attraction exercée par un hémisphère, un fuseau ou un polygone sphérique sur le centre de la sphère.

Mais, afin de rendre notre travail plus complet, nous nous occuperons d'abord, 1.° de l'attraction exercée par un plan homogène, indéfini d'une part, et terminé de l'autre par une droite indéfinie, sur l'un des points de cette droite; 2.° de l'attraction exercée par un angle plan, homogène et indéfini, sur son sommet; ou ce qui revient au même, nous chercherons l'intensité et la direction de l'attraction exercée par une demi-circonférence ou par un arc quelconque de grand cercle, sur le centre de la sphère.

LEMME I. Déterminer l'intensité et la direction de l'action exercée sur le centre d'une sphère, par le trapèze sphérique isocèle compris entre deux méridiens quelconques et deux parallèles quelconques à l'équateur?

Solution. Soit pris le rayon de la sphère pour unité de longueur. Soit a l'arc de l'équateur compris entre les deux méridiens qui terminent le trapèze, et dont nous adoptons les plus à gauche pour premier méridien; soient b, b' les distances polaires des deux parallèles. Soit R l'intensité inconnue de l'attraction exercée par l'aire du trapèze sur le centre de la sphère; cette force sera évidemment dirigée dans le plan d'un méridien également distant de ceux qui terminent le trapèze; c'est-à-dire, que sa longitude sera $\frac{1}{2}a$; il ne

s'agira donc plus, pour en connaître la direction, que d'en assigner la distance polaire, que nous désignerons par θ.

Cela posé, concevons cette force R décomposée, dans le plan de son méridien, en deux autres; l'une P dirigée vers le pôle, et l'autre Q dirigée dans le plan de l'équateur; d'après les premières notions de statique, nous aurons

$$P=R\text{Cos.}\theta\,, \qquad Q=R\text{Sin.}\theta\,.$$

La force Q, se dirigeant au milieu de l'arc de l'équateur intercepté entre les deux méridiens qui terminent le trapèze pourra ultérieurement être décomposée, dans l'équateur, en deux forces égales, passant par les extrémités de cet arc; et, en appelant S l'une de ces forces, on aura

$$S.\text{Sin.}a=Q.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,.$$

Eliminant Q entre ces trois équations, on en tire

$$R=\sqrt{P^2+4S^2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a}\,, \qquad \text{Tang.}\theta=\frac{2S\text{Cos.}\frac{1}{2}a}{P}\,;$$

de sorte que tout se réduit à trouver P et S.

Pour y parvenir, considérons, sur notre trapèze sphérique, un élément m, dont la longitude soit x, et la distance polaire y. Supposons que cet élément soit lui-même un trapèze sphérique isocèle, compris entre deux méridiens interceptant entre eux un arc $\mathrm{d}x$ de l'équateur, et entre deux parallèles interceptant entre eux un arc $\mathrm{d}y$ du premier méridien; la surface de la zône infiniment étroite dont l'élément m fait partie, ayant pour expression $2\varpi\mathrm{d}y\text{Sin.}y$; il s'ensuit que la surface même de cet élément sera $\frac{\mathrm{d}x}{2\varpi}.2\varpi\mathrm{d}y\text{Sin.}y$; c'est-à-dire, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{Sin.}y$; et l'attraction exercée par ce même élément sur le centre de la sphère, suivant la direction

du rayon qui lui répond, sera $k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{Sin}.y$; k étant une constante qui dépendra de l'intensité de la force attractive.

Décomposons cette attraction, que nous pouvons représenter par d^2R, en deux autres, l'une d^2P dirigée vers le pôle, et l'autre d^2Q dirigée vers le point de l'équateur dont la longitude est x; par le principe de la composition des forces, nous trouverons, pour les deux composantes,

$$\mathrm{d}^2P=k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{Sin}.y\,\mathrm{Cos}.y\,, \qquad \mathrm{d}^2Q=k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{Sin}.^2y\,.$$

Décomposons cette dernière, dans le plan de l'équateur, en deux autres passant par les points de ce cercle dont les longitudes sont o et a; en désignant cette dernière par d^2S, nous aurons

$$\mathrm{d}^2S=\mathrm{d}^2Q.\frac{\mathrm{Sin}.x}{\mathrm{Sin}.a}=\frac{k}{\mathrm{Sin}.a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{Sin}.x\,\mathrm{Sin}.^2y\,.$$

Intégrant une première fois, par rapport à x, entre $x=$o et $x=a$, nous aurons

$$\mathrm{d}P=ka\mathrm{d}y\,\mathrm{Sin}.y\,\mathrm{Cos}.y\,, \qquad \mathrm{d}S=k\mathrm{d}y\,\mathrm{Sin}.^2y\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a\,.$$

Intégrant une seconde fois, par rapport à y, entre $y=b'$ et $y=b$, il viendra

$$P=\tfrac{1}{2}ka\,\mathrm{Sin}.(b+b')\mathrm{Sin}.(b-b')\,,$$

$$S=\tfrac{1}{2}k\,\mathrm{Tang}.\tfrac{1}{2}a.\{(b-b')-\mathrm{Sin}.(b-b')\mathrm{Cos}.(b+b')\}\,.$$

Substituant enfin ces valeurs dans celles de R et $\mathrm{Tang}.t$, trouvées ci-dessus, nous aurons

$$R=\tfrac{1}{2}k\sqrt{a^2\mathrm{Sin}.^2(b+b')\mathrm{Sin}.^2(b-b')+4\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a.[(b-b')-\mathrm{Sin}.(b-b')\mathrm{Cos}.(b+b')]^2}\,, \qquad \text{(I)}$$

$$\mathrm{Tang}.t=\frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}a}{\tfrac{1}{2}a}.\frac{(b-b')-\mathrm{Sin}.(b-b')\mathrm{Cos}.(b+b')}{\mathrm{Sin}.(b+b')\mathrm{Sin}.(b-b')}\,. \qquad \text{(II)}$$

Et telles sont les deux formules fondamentales desquelles nous allons déduire successivement tous les cas particuliers.

PROBLÈME I. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par un arc de petit cercle sur le centre de la sphère ?

Solution. Soit supposé l'arc de petit cercle dont il s'agit parallèle à l'équateur, et soit a l'arc de cet équateur compris entre les méridiens qui le terminent. Soit, en outre, b la distance polaire de cet arc. On obtiendra la solution du problème en faisant, dans les formules (I, II), $b'=b-\mathrm{d}b$, et observant que $\mathrm{Sin.d}b=\mathrm{d}b$, et que $\mathrm{Cos.d}b=1$. Il viendra ainsi

$$R=k\mathrm{d}b.\mathrm{Sin}.b.\sqrt{a^2\mathrm{Cos}.^2b+4\mathrm{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Sin}.^2b}\,,$$

$$\mathrm{Tang}.\theta=\frac{\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}a}{\tfrac{1}{2}a}.\mathrm{Tang}.b\,.$$

Il est d'ailleurs évident que cette force sera dirigée dans le plan du méridien qui divise en deux parties égales l'arc dont il s'agit.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action exercée par une portion de surface conique droite homogène, soit indéfinie, soit à base circulaire, comprise entre deux arètes ou génératrices rectilignes, sur un point placé à son sommet, en supposant que l'angle générateur est b, et que les plans conduits par l'axe et par les deux génératrices extrêmes forment entre eux un angle dièdre égal à a.

Remarque. de l'expression de Tang.θ on conclut

$$a : \mathrm{Cord}.a :: \mathrm{Tang}.b : \mathrm{Tang}.\theta\,;$$

mais, si l'on suppose le rayon de la sphère infini, les arcs de grands cercles se confondront avec leurs tangentes; de sorte que l'on aura alors

$$a : \text{Cord}.a :: b : t\ ;$$

mais, d'un autre côté, les actions exercées par les différens points de l'arc seront égales et parallèles ; d'où il suit que le point où la force R rencontrera la surface sphérique devenue plane, sera le centre de gravité de l'arc dont il s'agit ; on a donc cette proportion : *Un arc est à sa corde comme son rayon est à la distance de son centre de figure à son centre de gravité ;* ce qui est conforme aux théories connues.

PROBLÈME II. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par la circonférence d'un petit cercle sur le centre de la sphère ?

Solution. En désignant par b la distance polaire de ce petit cercle, il suffira, pour résoudre le problème, de supposer $a=2\varpi$, dans les formules du problème précédent, ce qui donnera

$$R=2\varpi k\text{d}b.\text{Sin}.b\text{Cos}.b=\varpi k\text{d}b.\text{Sin}.2b\ ,\quad \text{Tang}.t=0\ .$$

Ainsi, cette attraction, dirigée vers le pôle, est proportionnelle au sinus du double de la distance polaire, ou, si l'on veut, au sinus du diamètre sphérique du petit cercle dont il s'agit ; elle est donc, toutes choses égales d'ailleurs, la plus grande possible pour le parallèle moyen.

Corollaire. Telle est donc aussi l'attraction exercée par une surface conique de révolution, soit indéfinie soit à base circulaire, sur un point placé à son sommet ; elle est donc la plus grande possible pour une surface conique dont l'angle générateur est demi-droit.

PROBLÈME III. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par un arc de grand cercle sur le centre de la sphère ?

Solution.

Solution. Il ne s'agit pour cela que de faire $b=\frac{1}{2}\varpi$, dans les formules du *Problème I*, lesquelles deviendront ainsi

$$R=2kdb.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a . \qquad \text{Tang}.t=\infty .$$

Ainsi, cette attraction, dirigée vers le milieu de l'arc, est proportionnelle au sinus de sa moitié, ou à la moitié de sa corde, et conséquemment à sa corde même; elle est donc la même pour un arc que pour son complément à la circonférence, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'elle doit être nulle pour la circonférence entière; elle est donc la plus grande possible pour une demi-circonférence.

Corollaire. Telle sera donc aussi la loi d'attraction du plan d'un angle indéfini ou d'un secteur de cercle, sur un point situé à son sommet ou centre.

Remarque. Si l'on prend pour unité d'attraction celle qui est exercée soit par un quart de circonférence ou par un quart de cercle, soit par le plan d'un angle droit indéfini, sur son centre ou sommet, on aura

$$1=2kdb.\tfrac{1}{2}\sqrt{2} , \qquad \text{d'où} \qquad kdb=\tfrac{1}{2}\sqrt{2} ;$$

au moyen de quoi la valeur de R deviendra

$$R=\sqrt{2}.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a .$$

C'est sous cette forme que nous emploîrons R dans le problème suivant.

PROBLÈME IV. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par le périmètre d'un triangle sphérique quelconque sur le centre de la sphère ?

Solution. Soient A, B, C les trois angles du triangle, et a, b, c les côtés respectivement opposés. D'après ce qui précède,

tout se réduira à déterminer l'intensité et la direction de la résultante R de trois forces X, Y, Z, dirigées suivant les rayons qui passent par les milieux des côtés a, b, c, du triangle, et ayant respectivement pour expressions

$$X=\sqrt{2}.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}a\ ,\quad Y=\sqrt{2}.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}b\ ,\quad Z=\sqrt{2}.\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}c\ . \qquad (1)$$

Désignons respectivement par α, β, γ les arcs de grands cercles qui joignent les milieux consécutifs des côtés du triangle, α étant opposé à a, β à b et γ à c; soient de plus x, y, z les arcs de grands cercles menés des mêmes milieux au point inconnu où la sphère est percée par la résultante, x partant du milieu de a, y du milieu de b et z du milieu de c; nous aurons, par les théories connues (*),

$$R^2=X^2+Y^2+Z^2+2YZ\mathrm{Cos}.\alpha+2ZX\mathrm{Cos}.\beta+2XY\mathrm{Cos}.\gamma\ . \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}R\mathrm{Cos}.x&=X+Y\mathrm{Cos}.\gamma+Z\mathrm{Cos}.\beta\ ,\\ R\mathrm{Cos}.y&=Y+Z\mathrm{Cos}.\alpha+X\mathrm{Cos}.\gamma\ ,\\ R\mathrm{Cos}.z&=Z+X\mathrm{Cos}.\beta+Y\mathrm{Cos}.\alpha\ .\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Cela posé, considérons le triangle dont les trois côtés sont γ, $\tfrac{1}{2}a$, $\tfrac{1}{2}b$, et dans lequel conséquemment l'angle opposé à γ est C; ce triangle donnera, comme l'on sait,

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}a\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}b\mathrm{Cos}.C=\mathrm{Cos}.\gamma-\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}a\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}b\ ;$$

mais le triangle proposé donne

(*) Voyez la pag. 55 du précédent volume.

$$\text{Sin}.a\text{Sin}\,b\text{Cos}.C=\text{Cos}.c-\text{Cos}.a\text{Cos}.b\ ,$$

ou bien

$$4\text{Sin}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.C=\text{Cos}.c-\text{Cos}.a\text{Cos}.b\ ;$$

divisant donc cette dernière par la première, afin d'éliminer Cos.C, nous aurons

$$4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b=\frac{\text{Cos}.c-\text{Cos}.a\text{Cos}.b}{\text{Cos}.\gamma-\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b}\ ;$$

ou, en chassant le dénominateur et transposant,

$$4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.\gamma=\text{Cos}.c-\text{Cos}.a\text{Cos}.b+4\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b\ ;$$

mais on a

$$4\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b=(1+\text{Cos}.a)(1+\text{Cos}.b)=1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.a\text{Cos}.b\ ;$$

substituant donc, réduisant et formant les équations analogues pour les deux autres triangles dont α et β sont des côtés, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\alpha&=1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c\ ,\\
4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\beta&=1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c\ ,\\
4\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.\gamma&=1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c\ .
\end{aligned}\right\}\ (4)$$

On peut donc, à l'aide de ces dernières formules, calculer Cos.α, Cos.β, Cos.γ, en fonction de a, b, c. Les premières donneront ensuite R, x, y, z, en fonction de ces mêmes quantités.

Par des principes connus, on a

$$1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c=2\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a+2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(b+c)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(b-c);$$

ou, en développant et réduisant,

$$1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c=2\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a+2\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c-2\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c;$$

ou, en transformant les sinus en fonctions de cosinus et réduisant,

$$1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c=2\left\{\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a+\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b+\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c-1\right\},$$

ou enfin

$$1+\text{Cos}.a+\text{Cos}.b+\text{Cos}.c=2\left\{\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b+\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a\right\};$$

substituant dans la première des équations (4), et exécutant sur les deux autres une transformation analogue, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\alpha=\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b+\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a\,,\\ 2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}c\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\beta=\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c+\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b\,,\\ 2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}a\text{Cos}.\tfrac{1}{2}b\text{Cos}.\gamma=\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}a+\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}b-\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c\,.\end{array}\right\}\quad(5)$$

Présentement, en vertu des formules (1), on a

$$X^2+Y^2+Z^2=2(\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a+\text{Sin}.\tfrac{1}{2}b+\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c)\;;$$

on a ensuite, en vertu des mêmes formules et des formules (5),

$$2YZ\text{Cos}.\alpha+2ZX\text{Cos}.\beta+2XY\text{Cos}.\gamma$$

$$=\frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c(\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}$$

$$+\frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a(\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a}$$

$$+\frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b(\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a+\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b};$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$(YZ\text{Cos.}\alpha+ZX\text{Cos.}\beta+XY\text{Cos.}\gamma)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$$

$$=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c)-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c$$

$$+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a)-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a$$

$$+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b+\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b;$$

ou encore

$$(YZ\text{Cos.}\alpha+ZX\text{Cos.}\beta+XY\text{Cos.}\gamma)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$$

$$=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c)-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c$$

$$+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(c+a)-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a$$

$$+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b;$$

ou enfin

$$(YZ\text{Cos.}\alpha+ZX\text{Cos.}\beta+XY\text{Cos.}\gamma)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$$

$$=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\}$$

$$+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(c+a)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\}$$

$$+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\}$$

mais, de la valeur de $X^2+Y^2+Z^2$ trouvée ci-dessus, on peut conclure

$$(X^2+Y^2+Z^2)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$$

$$=2(\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\ ;$$

ajoutant à cette expression le double de la précédente, et ayant égard à l'équation (2), il viendra

$$R^2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$$

$$=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a(\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c)\}$$

$$+2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(c+a)+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b(\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a)\}$$

$$+2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c(\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b-\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\}$$

ou encore

$$R^2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c$$

$$=\text{Sin.}a\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c)+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+c)\}$$

$$\text{Sin.}b\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(c+a)+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(c+a)\}$$

$$\text{Sin.}c\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b)+\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a+b)\}$$

ou enfin

$$R^2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c=(\text{Sin.}a+\text{Sin.}b+\text{Sin.}c)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

d'où

$$R=\sqrt{\frac{(\text{Sin.}a+\text{Sin.}b+\text{Sin.}c)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}\tfrac{1}{2}c}}.$$

Telle est donc l'intensité de l'action exercée par le périmètre du triangle sphérique sur le centre de la sphère, du moins en prenant pour unité l'action exercée par le quart d'un grand cercle. Voyons actuellement quelle en sera la direction.

Cette direction perce la surface de la sphère en un point dont les distances aux trois sommets du triangle sphérique ayant pour ses côtés α, β, γ sont x, y, z. Cherchons l'arc de grand cercle abaissé perpendiculairement de ce même point sur l'un quelconque des côtés de ce triangle, sur γ par exemple. Cet arc de grand cercle n'est évidemment autre chose que l'arc abaissé perpendiculairement sur le côté γ, du sommet opposé, dans le triangle sphérique dont les trois côtés sont γ, x, y. Représentons par ρ l'arc cherché, et soient G, H les angles du triangle respectivement opposés à x, y; dans le triangle sphérique rectangle dont l'hypothénuse est x et l'un des côtés de l'angle droit ρ, nous aurons

$$\text{Sin.}\rho=\text{Sin.}x\,\text{Sin.}H \qquad \text{ou} \qquad \text{Sin.}^2\rho=\text{Sin.}^2x\,\text{Sin.}^2H,$$

ou encore

$$\text{Sin.}^2\rho=\text{Sin.}^2x(1-\text{Cos.}^2H)\;;$$

mais, par les formules connues,

$$\text{Cos.}H=\frac{\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}y\text{Cos.}x}{\text{Sin.}y\text{Sin.}x}\,,$$

d'où

$$1-\text{Cos.}^2H=\frac{\text{Sin.}^2y\text{Sin.}^2x-(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}y\text{Cos.}x)^2}{\text{Sin.}^2y\text{Sin.}^2x}$$

$$=\frac{(1-\text{Cos.}^2y)(1-\text{Cos.}^2x)-(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}y\text{Cos.}x)^2}{\text{Sin.}^2y\text{Sin.}^2x}$$

$$=\frac{1-\text{Cos.}^2y-\text{Cos.}^2x-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{\text{Sin.}^2y\text{Sin.}^2x}\;;$$

substituant cette valeur dans celle de $\text{Sin.}^2\rho$, elle deviendra

$$\text{Sin.}^2\rho=1-\frac{\text{Cos.}^2x-2\text{Cos.}x\text{Cos.}y\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}^2\gamma}{\text{Sin.}^2y}\;;$$

d'où encore

$$\text{Cos.}^2\rho=\frac{\text{Cos.}^2x-2\text{Cos.}x\text{Cos.}y\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}^2y}{\text{Sin.}^2y}\;;$$

valeur que l'on peut encore écrire sous cette forme

$$\text{Cos.}^2\rho=\frac{(R\text{Cos.}x)^2-2(R\text{Cos.}x)(R\text{Cos.}y)\text{Cos.}\gamma+(R\text{Cos.}y)^2}{R^2\text{Sin.}^2y}\,.$$

En substituant dans cette expression pour $R\text{Cos.}x$ et $R\text{Cos.}y$ leur valeur

valeurs données par les équations (3), elle deviendra, en réduisant et ayant égard à l'équation (2),

$$\mathrm{Cos}^2\rho=1-\frac{(1-\mathrm{Cos.}^2\alpha-\mathrm{Cos.}^2\beta-\mathrm{Cos.}^2\gamma+2\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma)Z^2}{R^2\mathrm{Sin.}^2\gamma};$$

d'où

$$\mathrm{Sin.}^2\rho=\frac{1-\mathrm{Cos.}^2\alpha-\mathrm{Cos.}^2\beta-\mathrm{Cos.}^2\gamma+2\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}\beta\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Sin.}^2\gamma}\cdot\frac{Z^2}{R^2}.$$

Or, R est connu, par ce qui précède; α, β, γ, sont donnés, soit par les équations (4), soit par les équations (5); enfin, par les équations (1) on a $Z^2=2\mathrm{Sin.}^2\frac{1}{2}c$; on a donc tout ce qui est nécessaire pour déterminer l'arc de grand cercle ρ abaissé du point cherché sur le côté γ du triangle sphérique dont les côtés sont α, β, γ; on pourra donc, de la même manière, obtenir les arcs de grands cercles abaissés du même point perpendiculairement sur les deux autres; on connaîtra donc ainsi les arcs de grands cercles abaissés perpendiculairement du point cherché sur les trois côtés d'un triangle sphérique donné de grandeur et de situation; ce point peut donc être considéré comme étant complètement déterminé.

Corollaire. Nous avons donc aussi résolu le problème où il s'agirait de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale de la surface d'un angle trièdre, soit indéfini, soit terminé par des arcs d'un même rayon quelconque, ayant leur centre commun à son sommet, sur un point situé à ce sommet.

Remarque I. On se conduirait d'une manière analogue s'il était question de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale exercée par le périmètre d'un polygone sphérique quelconque sur le centre de la sphère, ou s'il était question de déterminer l'intensité et la direction de l'action totale exercée par la surface d'un angle polyèdre quelconque, soit indéfini, soit terminé par des arcs d'un même rayon quelconque, ayant son sommet pour centre com-

mun, sur un point situé à ce sommet; mais il paraît que les formules seraient d'une extrême complication.

Remarque II. Si le rayon de la sphère devient infini, le triangle dont les côtés sont a, b, c devient un triangle rectiligne; et le triangle dont les côtés sont α, β, γ, devient également un triangle rectiligne inscrit au premier, ayant ses côtés parallèles aux siens et conséquemment d'une longueur moitié de celle de leur homologue dans celui-là; on a donc, dans ce cas, $\gamma=\frac{1}{2}c$, d'où

$$Z^2=2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c=2\text{Sin.}^2\gamma\ ,$$

et par suite

$$\text{Sin.}^2\rho=2.\frac{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}{R^2}\ ;$$

ρ est donc alors une fonction tout-à-fait symétrique; le point où la résultante coupe le plan des deux triangles, lequel est alors évidemment le centre de gravité du périmètre du triangle dont les côtés sont a, b, c, est donc également distant des trois côtés α, β, γ, de l'autre; il est donc le centre du cercle inscrit à ce dernier; ainsi, *le centre de gravité du périmètre d'un triangle rectiligne quelconque est le centre du cercle inscrit au triangle rectiligne dont les sommets seraient les milieux des côtés de celui-là;* c'est le théorème de M. Poinsot. (Voyez sa *Statique.*)

PROBLÈME V. Déterminer l'intensité et la direction de la force attractive exercée par une zône sphérique quelconque, à bases parallèles, sur le centre de la sphère?

Solution. Supposons que le pôle commun des deux bases de la zône soit le pôle même de la sphère, et soient b, b' les distances polaires des circonférences de ces deux bases; il ne s'agira évidemment, pour résoudre le problème, que de supposer $a=2\varpi$, dans les formules (I, II); elles deviendront ainsi

$$R=\pi k\,\text{Sin.}(b+b')\text{Sin.}(b-b')\,,\qquad \text{Tang.}t=0\,.$$

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action exercée par un corps compris entre deux surfaces coniques de même axe et de même sommet, dont les angles générateurs sont b, b', sur un point situé à ce sommet, soit que ce corps soit indéfini, soit qu'on le suppose terminé, du côté opposé à son sommet, par une surface sphérique de rayon quelconque, ayant ce sommet pour centre.

PROBLÈME VI. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée sur le centre de la sphère, par la surface du triangle sphérique mixtiligne isocèle compris entre deux grands cercles et le petit cercle ayant leur intersection pour pôle?

Solution. Supposons que les deux grands cercles dont il s'agit soient deux méridiens formant entre eux un angle a, et soit b la distance polaire du petit cercle; il suffira évidemment, pour résoudre le problème proposé, de supposer $b'=0$, dans les formules (I, II), lesquelles deviendront ainsi

$$R=\tfrac{1}{2}k\sqrt{a^2\text{Sin.}^4b+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a(2b-\text{Sin.}2b)^2}\,,$$

$$\text{Tang.}t=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}\cdot\frac{2b-\text{Sin.}2b}{2\text{Sin.}^2b}\,.$$

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle solide trièdre indéfini, terminé par deux plans et par une portion de surface conique de révolution ayant son axe dans l'intersection des deux plans, sur un point situé à son sommet, soit que cet angle solide soit indéfini, soit

qu'on le suppose terminé, du côté opposé à son sommet, par une surface sphérique de rayon quelconque, ayant ce sommet pour centre.

PROBLÈME VII. *Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par la surface d'un triangle sphérique bi-rectangle quelconque sur le centre de la sphère ?*

Solution. En supposant que les deux côtés égaux du triangle dont il s'agit sont deux méridiens formant entre eux un angle a; il ne s'agira, pour résoudre le présent problème, que de supposer $b=\frac{1}{2}\varpi$, dans les formules du précédent ; elles deviendront ainsi

$$R=\tfrac{1}{2}k\sqrt{a^2+\varpi^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a}\,, \qquad \text{Tang.}\theta=\tfrac{1}{2}\varpi\,.\,\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}\,.$$

On voit par là que Tang.θ tend sans cesse à devenir $\frac{1}{2}\varpi$, ou que θ tend sans cesse à devenir 80°.57'.25'' à peu près, à mesure que a diminue.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée par un angle solide trièdre bi-rectangle sur son sommet, soit que cet angle solide soit indéfini, soit qu'on le suppose terminé, du côté opposé au sommet, par une surface sphérique de rayon quelconque, ayant ce sommet pour centre, de manière à former une pyramide sphérique bi-rectangle.

PROBLÈME VIII. *Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée sur le centre de la sphère par la surface d'un triangle sphérique tri-rectangle ?*

Solution. Il ne s'agit évidemment pour cela que de supposer $a=\frac{1}{2}\varpi$, dans les formules du précédent problème, lesquelles deviendront ainsi

$$R=\tfrac{1}{4}\varpi k\sqrt{3}\,, \qquad \text{Tang.}\theta=\sqrt{2}\,.$$

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée, soit par un angle solide trièdre tri-rectangle indéfini, soit par une pyramide triangulaire sphérique solide tri-rectangle, sur un point situé à son sommet.

Remarque. De même que nous avons pris pour unité d'attraction des angles plans, celle qui est exercée par l'angle droit plan ; il paraît naturel de prendre, pour unité d'attraction des angles solides polyèdres, celle qui est exercée par l'angle solide trièdre tri-rectangle ; on a ainsi

$$1=\tfrac{1}{4}\varpi k\sqrt{3}\,, \quad \text{d'où} \quad k=\frac{4\sqrt{3}}{3\varpi}\,.$$

C'est sous cette forme que nous emploirons à l'avenir la valeur de k.

PROBLÈME IX. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par une calotte sphérique sur le centre de la sphère ?

Solution. En désignant par b la distance polaire du petit cercle qui termine la calotte dont il s'agit, on parviendra également à la solution de ce problème, soit en faisant $b'=0$, dans les formules du *Problème V*, soit en faisant $a=2\varpi$, dans les formules du *Problème VI*. Par l'une ou par l'autre voie, on trouvera également, en ayant égard à la valeur de k déterminée ci-dessus,

$$R=\frac{4\text{Sin.}^2 b}{\sqrt{3}}\,, \qquad \text{Tang.}\,\theta=0\,.$$

Cette force, dirigée vers le pôle, est donc proportionnelle au quarré du sinus de la distance polaire du petit cercle qui termine la calotte, ou ce qui revient au même, au quarré du rayon de cette base, et par conséquent à l'aire même de cette base ; elle est donc la

même pour les deux calottes qui complètent la surface sphérique, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'elle doit être nulle pour la sphère entière. On peut remarquer encore que pour les distances polaires de 30°, 45°, 60°, 90°, les intensités suivent le rapport des nombres 1, 2, 3, 4.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale d'un cône de révolution solide homogène et indéfini ou d'un secteur sphérique sur un point situé à son sommet; cette action sera donc la plus grande possible, soit pour un corps indéfini terminé d'une part par un plan indéfini, soit pour un hémisphère solide et homogène.

Remarque. En rapprochant de la solution de ce problème celle que nous avons obtenue pour le *Problème III*, on en voit ressortir une analogie très-remarquable entre l'une et l'autre. Le plan du cercle qui sert de base à une calotte sphérique est en effet, par rapport à cette calotte, ce qu'est la corde d'un arc par rapport à cet arc même; et, de même que l'attraction exercée par l'arc se trouve proportionnelle à sa corde, celle qu'exerce la calotte sphérique se trouve, semblablement, proportionnelle à l'aire de sa base.

PROBLÈME X. Déterminer l'intensité la direction de l'attraction exercée par un fuseau sphérique sur le centre de la sphère?

Solution. En désignant par a l'angle des plans des deux grands cercles qui terminent le fuseau, il suffira évidemment de supposer $b=\pi$, dans les formules du *Problème VI*, ce qui donnera, en ayant d'ailleurs égard à la valeur assignée à k,

$$R=\frac{4\text{Sin.}\frac{1}{2}a}{\sqrt{3}}, \qquad \text{Tang.}t=\infty .$$

Cette force, dirigée vers le milieu de l'arc de l'équateur intercepté entre les deux méridiens qui bornent le fuseau, est donc proportionnelle à la corde de cet arc; elle est donc la même pour un

fuseau quelconque que pour son complément à la sphère, ainsi que cela doit être ; elle est donc la plus grande possible pour la surface de l'hémisphère. On peut encore remarquer que, pour les fuseaux de 60°, 90°, 180°, les forces seront entre elles comme les nombres $1, \sqrt{2}, 2$.

Corollaire. Telles seront donc aussi l'intensité et la direction de l'action totale exercée soit par un angle solide dièdre homogène et indéfini sur un point de son arête, soit par un onglet sphérique homogène, compris entre les plans de deux grands cercles sur le milieu de son arête rectiligne.

Remarque I. La comparaison des résultats que nous venons d'obtenir avec celui où nous a conduit le *Problème III* donne lieu à un rapprochement très-remarquable : il consiste en ce que l'attraction exercée par un angle solide dièdre homogène et indéfini sur un point de son arête croît et décroît exactement comme celle qu'exercerait sur le même point le plan de la section faite perpendiculairement à l'angle solide par le même point ; de sorte qu'il n'y a absolument entre l'une et l'autre forces qu'une simple différence d'intensité.

Remarque II. Si l'on demandait quelle doit être la grandeur de l'angle dièdre pour que son action sur un point de son arête fût double de celle qu'exercerait sur ce même point un angle trièdre tri-rectangle dont il serait le sommet, il suffirait de faire $R=2$, ce qui donnerait

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,, \qquad \text{d'où} \qquad \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{3}\,;$$

cela donne $\frac{1}{2}a=60°$ et $a=120°$. Ainsi, un point placé sur l'arête d'un angle dièdre solide homogène et indéfini de 120°, en est deux fois plus attiré, toutes choses égales d'ailleurs, qu'il ne le serait par un angle trièdre solide tri-rectangle indéfini au sommet duquel il se trouverait situé.

LEMME II. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par une portion de fuseau sphérique infiniment étroit sur le centre de la sphère?

Solution. En supposant que les arcs de grands cercles qui bornent le fuseau soient des arcs de méridiens, d'une longueur commune égale à b, et formant entre eux un angle égal à $\mathrm{d}a$, il suffira évidemment, pour parvenir au but, de changer a en $\mathrm{d}a$, dans les formules du *Problème VI*; observant qu'alors $\text{Sin}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}a=\frac{1}{2}\mathrm{d}a$, il viendra

$$R=\tfrac{1}{2}k\mathrm{d}a\sqrt{b^2-2b\,\text{Sin.}b\,\text{Cos.}b+\text{Sin.}^2b}\,,\qquad \text{Tang.}\theta=\frac{b-\text{Sin.}b\,\text{Cos.}b}{\text{Sin.}^2b}\,.$$

PROBLÈME XI. Déterminer l'intensité et la direction de l'attraction exercée par la surface d'un triangle sphérique quelconque sur le centre de la sphère?

Solution. Le triangle sphérique dont il s'agit étant donné, ses angles et ses côtés doivent l'être aussi. Soient donc a, b, c ses trois côtés et A, B, C les angles respectivement opposés. Supposons-le tellement situé sur la sphère que son côté a se confonde avec le premier méridien et le sommet de son angle C avec le pôle.

Considérons sur ce triangle une portion de fuseau infiniment étroite ayant son sommet en C et se terminant au côté opposé c; soit X l'angle que forme l'un des deux méridiens qui borne cette portion de fuseau avec le premier méridien; soit $\mathrm{d}X$ l'angle des deux méridiens qui le terminent, et soit enfin y leur longueur commune jusqu'au côté c (car, à cause de l'angle infiniment petit qu'ils comprennent, il est permis de les supposer égaux). Si nous désignons par $\mathrm{d}P$ l'action exercée par cet élément sur le centre de la sphère et par θ l'angle que fait sa direction avec le rayon qui va au pôle, nous aurons, par le *Lemme II*,

$$\mathrm{d}P=\tfrac{1}{2}k\mathrm{d}X\sqrt{y^2-2y\,\text{Sin.}y\,\text{Cos.}y+\text{Sin.}^2y}\,,\qquad \text{Tang.}\theta=\frac{y-\text{Sin.}y\,\text{Cos.}y}{\text{Sin.}^2y}\,;$$

et,

et, d'après les principes connus sur les triangles sphériques, les variables X et y se trouveront liées entre elles par la relation

$$\text{Cos}.a\text{Cos}.X=\text{Sin}.a\text{Cot}.y-\text{Sin}.X\text{Cot}.B\,, \qquad (1)$$

de laquelle on tire, par différentiation,

$$\text{d}y.\text{Sin}.a=\text{d}X.(\text{Cos}.a\text{Sin}.X-\text{Cot}.B\text{Cos}.X)\,. \qquad (2)$$

Considérant, dans ces deux équations, Sin.X et Cos.X comme deux inconnues, nous en tirerons

$$(\text{Cos}.^2a+\text{Cot}.^2B)\text{Sin}.X=\text{Sin}.a\left(\text{Cot}.B\text{Cot}.y+\frac{\text{d}y}{\text{d}X}\text{Cos}.a\right),$$

$$(\text{Cos}.^2a+\text{Cot}.^2B)\text{Sin}.Y=\text{Sin}.a\left(\text{Cos}.a\text{Cot}.y-\frac{\text{d}y}{\text{d}X}\text{Cot}.B\right);$$

ajoutant ensemble les quarrés de ces deux équations, nous aurons, en réduisant,

$$(\text{Cos}.^2a+\text{Cot}.^2B)=\text{Sin}.^2a\left\{\text{Cot}.^2y+\left(\frac{\text{d}y}{\text{d}X}\right)^2\right\};$$

d'où

$$\text{d}X=\text{Sin}.a.\frac{\text{d}y\text{Sin}.y}{\sqrt{(\text{Cos}.^2a+\text{Cot}.^2B)\text{Sin}.^2y-\text{Sin}.^2a\text{Cos}.^2y}};$$

substituant cette valeur de dX dans celle de dP, elle deviendra

$$\text{d}P=\tfrac{1}{2}k\text{Sin}.a.\frac{\text{d}y.\text{Sin}.y\sqrt{y^2-2y\text{Sin}.y\text{Cos}.y+\text{Sin}.^2y}}{\sqrt{(\text{Cos}.^2a+\text{Cot}.^2B)\text{Sin}.^2y-\text{Sin}.^2a\text{Cos}.^2y}}\,.$$

Cherchons présentement à décomposer cette force en trois autres $\mathrm{d}D$, $\mathrm{d}E$, $\mathrm{d}F$, passant par les sommets A, B, C, ou plutôt cherchons seulement la composante $\mathrm{d}F$ passant par le sommet A; attendu que de celle-là il sera facile de conclure les deux autres. Pour y parvenir, remarquons que, par les principes de la statique, on a

$$\mathrm{d}P : \mathrm{d}F :: \mathrm{Sin.}\gamma : \mathrm{Sin.}(\gamma-\theta);$$

d'où

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}P.\frac{\mathrm{Sin.}(\gamma-\theta)}{\mathrm{Sin.}\gamma},$$

mais, d'après l'expression de $\mathrm{Tang.}\theta$, on trouve,

$$\mathrm{Sin.}\theta=\frac{\gamma-\mathrm{Sin.}\gamma\mathrm{Cos.}\gamma}{\sqrt{\gamma^2-2\gamma\mathrm{Sin.}\gamma\mathrm{Cos.}\gamma+\mathrm{Sin.}^2\gamma}};$$

$$\mathrm{Cos.}\theta=\frac{\mathrm{Sin.}^2\gamma}{\sqrt{\gamma^2-2\mathrm{Sin.}\gamma\mathrm{Cos.}\gamma+\mathrm{Sin.}\gamma}};$$

d'où résulte

$$\mathrm{Sin.}(\gamma-\theta)=\mathrm{Sin.}\gamma\mathrm{Cos.}\theta-\mathrm{Cos.}\gamma\mathrm{Sin.}\theta=\frac{\mathrm{Sin.}\gamma-\gamma\mathrm{Cos.}\gamma}{\sqrt{\gamma^2-2\gamma\mathrm{Sin.}\gamma\mathrm{Cos.}\gamma+\mathrm{Sin.}^2\gamma}};$$

et par conséquent

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}P.\frac{\mathrm{Sin.}\gamma-\gamma\mathrm{Cos.}\gamma}{\mathrm{Sin.}\gamma\sqrt{\gamma^2-2\gamma\mathrm{Sin.}\gamma\mathrm{Cos.}\gamma+\mathrm{Sin.}^2\gamma}};$$

mettant enfin pour $\mathrm{d}P$ la dernière valeur trouvée ci-dessus, nous aurons

$$\mathrm{d}F=\tfrac{1}{2}k\mathrm{Sin.}\alpha.\frac{(\mathrm{Tang.}\gamma-\gamma)\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{(\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cot.}^2\beta)\mathrm{Tang.}^2\gamma-\mathrm{Sin.}^2\alpha}}.$$

Voici donc finalement à quoi se réduit la question. Il faudra intégrer dF, entre $X=0$ et $X=C$, c'est-à-dire, entre

$$\text{Cot.}y=\frac{\text{Cos.}a+\text{Cot.}B}{\text{Sin.}a} \quad \text{et} \quad \text{Cot.}y=\frac{\text{Cos.}a\text{Cos.}C+\text{Cot.}B\text{Sin.}C}{\text{Sin.}a};$$

on obtiendra ainsi une expression de F que l'on pourra toujours amener à n'être uniquement fonction que des trois côtés du triangle proposé, et de laquelle, par une simple permutation de lettres, on conclura les valeurs de D, E; on connaîtra donc les intensités et les directions de trois composantes D, E, F, passant respectivement par les points A, B, C; d'où il sera facile de conclure l'intensité et la direction de leur résultante R.

Dans un article supplémentaire, nous tenterons d'intégrer l'expression de dF, et de compléter ainsi la solution de notre problème.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. DÉTERMINER la surface d'un quadrilatère rectiligne circonscrit au cercle, en fonctions de ses quatre côtés?

II. Partager l'aire d'un quadrilatère rectiligne quelconque en quatre parties équivalentes, par deux droites perpendiculaires entre elles, se coupant dans son intérieur?

III. Déterminer l'aire du quadrilatère sphérique inscrit à un petit cercle, en fonction de ses quatre côtés et du rayon de la sphère?

IV. Déterminer l'aire du quadrilatère sphérique circonscrit à un petit cercle, en fonctions de ses quatre côtés et du rayon de la sphère?

V. Partager l'aire d'un quadrilatère sphérique quelconque en quatre parties équivalentes, par deux arcs de grands cercles se coupant perpendiculairement dans son intérieur?

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Sur l'emploi de l'algorithme des fonctions, dans la démonstration des théorèmes de geométrie;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des *Annales*;

MONSIEUR,

JE viens de lire dans la *Bibliothèque universelle*, (octobre 1819), un article, signé des initiales F. M., dans lequel l'auteur se propose de défendre, contre les attaques de M. le professeur Leslie, et de quelques autres géomètres de la Grande Bretagne, la démonstration donnée par M. Legendre de la 32.me proposition d'Euclide, dans la note II de ses *Élémens de géométrie.*

En examinant cet écrit avec attention, il m'a paru que d'une part le célèbre physicien d'Edimbourg n'avait point complètement épuisé la série des objections qu'on peut opposer au tour de démonstration dont il prétend infirmer la validité, et que d'une autre, son adversaire n'avait peut-être point usé contre lui de toute la plénitude de ses avantages.

Or, comme la matière n'est pas moins importante qu'elle est



délicate, attendu la multitude des occasions où le tour de raisonnement employé par M. Legendre pourrait être appliqué, si ce tour de raisonnement était une fois reconnu concluant ; j'ai pensé qu'en attendant que quelqu'autre, plus habile que moi, nous dise clairement à quoi nous devons nous en tenir sur ce sujet, vous ne dédaigneriez peut-être pas, Monsieur, quelques réflexions préparatoires que je vous livre avec d'autant plus de confiance qu'elles sont en quelque sorte votre ouvrage, n'étant, pour ainsi dire, que le développement des doctrines que vous avez vous-même constamment professées en maints endroits de votre estimable recueil.

Rappelons d'abord sommairement le raisonnement de M. Legendre, en lui donnant encore, s'il est possible, plus de force qu'il n'en a dans son ouvrage.

Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle *effectif*, et soient A, B, C les angles respectivement opposés. On prouve rigoureusement, par la superposition, que, connaissant uniquement le côté c et les deux angles adjacents A, B, le triangle est complètement déterminé, de telle sorte qu'on en peut construire un autre qui lui soit égal ; donc aussi, avec ces seules données, on peut parvenir à la connaissance des trois autres parties du triangle, qui conséquemment sont des fonctions de tout ou partie de ces trois-là ; donc, en particulier, le troisième angle C est au plus une fonction des deux autres A, B et du côté c auquel ils sont adjacents. On peut donc écrire

$$C=\mathrm{F}(A\ ,\ B\ ,\ c)\ ;$$

F désignant une fonction d'une forme inconnue, si l'on veut, mais néanmoins complètement déterminée et unique ; ne pouvant se composer d'aucun élément étranger à A, B, c ; mais pouvant fort bien d'ailleurs ne pas se composer de la totalité de ces élémens.

Or, s'il était possible que le côté c entrât dans la composition de cette fonction, on pourrait toujours, quelle que fût d'ailleurs

la forme de l'équation symbolique que nous venons d'établir, concevoir cette équation résolue par rapport à c; ce qui conduirait à une autre équation de la forme

$$c=\mathrm{f}(A\ ,\ B\ ,\ C)\ ,$$

dans laquelle f désignerait une nouvelle fonction qui pourrait bien, à la vérité, être susceptible de plusieurs formes, mais qui serait néanmoins complètement déterminée comme la première; et dont la forme ou les formes diverses ne dépendraient uniquement que de la forme de celle-ci.

Or, cette dernière équation est évidemment absurde; car elle exprime qu'un calcul fait uniquement sur des angles peut donner pour résultat final une longueur déterminée. Si quelqu'un prétendait admettre la possibilité d'une semblable équation, on serait naturellement fondé à lui demander en quelle sorte d'unites elle donnera la longueur c? si ce sera en toises ou en mètres, ou en toute autre sorte de mesures linéaires? et l'évidente impossibilité de répondre à cette question, prouve suffisamment l'absurdité de l'équation qui y donnerait lieu.

Puis donc que cette équation absurde est une conséquence rigoureuse de la supposition que nous avions faite que c pouvait entrer dans la composition de la fonction F; il s'ensuit que cette supposition est elle-même absurde, et qu'ainsi on doit avoir simplement

$$C=\mathrm{F}(A\ ,\ B)\ ;$$

d'où il suit que deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun, ont aussi le troisième angle égal. En partant de là on parvient facilement, sans rien emprunter de la théorie des parallèles, et par un raisonnement dont personne n'a jamais songé à contester la rigueur, à démontrer que, dans tout triangle, la

somme des trois angles vaut deux angles droits ; et la théorie des parallèles ne présente plus dès-lors aucune difficulté.

Voici présentement les principales objections que M. le professeur Leslie et ses correspondans opposent à ce raisonnement ; je tâcherai également de les présenter dans toute leur force.

I. Suivant M. Leslie, il n'est pas généralement vrai qu'une grandeur ne puisse résulter de la combinaison d'autres grandeurs tout à fait hétérogènes avec celles-là ; et la mécanique, en particulier, offre plus d'un exemple de ces sortes de résultats. La raison en est que le calcul ne considère pas proprement les grandeurs concrètes, mais seulement les rapports de ces grandeurs avec leurs unités respectives, c'est-à-dire, des nombres purement abstraits ; d'où M. Leslie se croit fondé à conclure que le raisonnement par lequel M. Legendre prétend prouver que le côté c ne saurait entrer dans son équation tombe de lui-même.

II. Tout en convenant que les angles et les longueurs sont des grandeurs absolument hétérogènes, M. Leslie pense qu'il n'existe entre elles d'autre différence que celle qui existe en général entre deux grandeurs hétérogènes quelconques, les longueurs et les temps, par exemple. En vain, suivant lui, voudrait-on se prévaloir de ce que les angles trouvent dans l'angle droit une mesure naturelle. L'angle droit, ajoute-t-il n'est pas plus la mesure naturelle des angles que le quart du méridien terrestre n'est la mesure naturelle des longueurs, ou la rotation diurne de la terre la mesure naturelle des temps ; de manière que toute distinction qu'on voudrait établir en faveur des angles serait tout-à-fait illusoire.

III. Dans la vue de montrer tout le faible de la démonstration de M. Legendre, M. Leslie en présente une sorte de parodie qui conduit à une conclusion évidemment absurde.

Soient, dit-il, a, b, c les trois côtés d'un triangle *effectif*, et soient A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés. On prouve rigoureusement, par la superposition, que, connaissant uniquement l'angle C et les deux côtés a, b qui le comprennent,

le triangle est complètement déterminé, de telle sorte qu'on en peut construire un autre qui lui soit égal ; donc aussi, avec ces seules données, on peut parvenir à la connaissance des trois autres parties du triangle, qui, conséquemment, sont des fonctions de toute ou partie de ces trois-là ; donc, en particulier, le troisième côté c est, tout au plus, une fonction des deux autres a, b, et de l'angle compris C. On peut donc écrire

$$c=\mathrm{F}(a\,,\,b\,,\,C)\,;$$

F désignant une fonction d'une forme inconnue, si l'on veut, mais néanmoins entièrement déterminée et unique, ne pouvant se composer d'aucun élément étranger à a, b, C, mais pouvant fort bien d'ailleurs ne pas se composer de la totalité de ces élémens.

Or, s'il était possible que l'angle C entrât dans la composition de cette fonction, on pourrait toujours, quelle que fût d'ailleurs la forme de l'équation symbolique que nous venons d'établir, concevoir cette équation résolue par rapport à C ; ce qui conduirait à une autre équation de la forme

$$C=\mathrm{f}(a\,,\,b\,,\,c)\,,$$

dans laquelle f désignerait une nouvelle fonction qui pourrait bien, à la vérité, être susceptible de plusieurs formes, mais qui serait néanmoins complètement déterminée, comme la première, et dont la forme ou les formes diverses ne dépendraient uniquement que de la forme de celle-ci.

Or, cette dernière équation est évidemment absurde ; car elle exprime qu'un calcul fait uniquement sur des longueurs peut donner pour résultat final un angle d'une grandeur déterminée. Si quelqu'un prétendait admettre la possibilité d'une semblable équation, on serait naturellement fondé à lui demander en quelle sorte d'unités elle donnera l'angle C ? si ce sera en degrés nonagésimaux ou centésimaux, ou en toute autre sorte de mesures angulaires ?

et l'évidente impossibilité de répondre à cette question prouve suffisamment l'absurdité de l'équation qui y donnerait lieu.

Puis donc que cette équation absurde est une conséquence rigoureuse de la supposition que nous avions faite que C pouvait entrer dans la composition de la fonction F; il s'ensuit que cette supposition est elle-même absurde; et qu'ainsi on doit avoir simplement

$$c=\mathrm{F}(a\ ,\ b)\ ;$$

d'où il suit que deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ont aussi le troisième côté égal; conclusion absurde qui prouve tout le vide du raisonnement qui y a conduit, et conséquemment aussi tout le vide du raisonnement de M. Legendre qui lui est semblable en tous points.

IV. On objecte encore à M. Legendre que son raisonnement est une sorte de *pétition de principe* ou de cercle vicieux, en ce qu'il implique le fameux *Postulatum* 13 d'Euclide, qu'il devrait, au contraire, tendre à démontrer. Ce raisonnement suppose, en effet, que, quelle que soit la longueur du côté c, les deux autres côtés a, b se rencontreront nécessairement en quelque point, pour former l'angle opposé C. Il n'est donc pas surprenant, ajoute-t-on, qu'admettant ce qu'Euclide admet, M. Legendre parvienne à établir sa 32.me proposition; mais la manière de procéder du géomètre français se trouve ainsi n'avoir, du côté de la rigueur, aucun avantage réel sur celle du géomètre d'Alexandrie.

V. On demande enfin à M. Legendre pourquoi, si son raisonnement symbolique était rigoureux, il ne pourrait pas être traduit en un raisonnement géométrique de la forme ordinaire? et quel privilège singulier et vraiment inexplicable aurait, en cet endroit, la notation fonctionnelle sur le langage vulgaire.

A l'exemple de M. F. M., avant de discuter et d'apprécier ces diverses objections, j'établirai d'abord mes principes, qui d'ailleurs différeront, je crois, très-peu des siens.

Comme vous l'avez fort bien observé vous-même, Monsieur, (*Annales*, tom. VIII, pag. 366 et suiv.) on ne peut être conduit à une grandeur concrète pour résultat d'un calcul, qu'autant que ce calcul peut être réduit à la multiplication d'une autre grandeur concrète de même nature que celle-là par un nombre abstrait ; de telle sorte que X et A représentant des grandeurs concrètes homogènes, et n un nombre absolument abstrait quelconque, la valeur de X doit être réductible à la forme

$$X=nA\ ;$$

n pouvant d'ailleurs être une fonction de tant de grandeurs concrètes qu'on voudra, soit de même nature que A et X, soit d'une nature totalement différente (*).

La première conséquence qui résulte de là, c'est qu'un raisonnement exact ne saurait conduire à une équation dans laquelle une grandeur concrète se trouverait seule de son espèce, et que conséquemment une équation de cette forme est une équation tout-à-fait absurde. On voit, en effet, qu'en résolvant une semblable équation par rapport à la grandeur concrète dont il s'agit, il serait impossible d'en trouver la valeur égale à une autre grandeur concrète de même espèce qu'elle, multipliée par un nombre abstrait. Ainsi a, b, c désignant les trois côtés d'un triangle, et A, B, C les angles respectivement opposés, nul doute que des équations de la forme

$$\varphi(A\,,\,B\,,\,C\,,\,c)=0\,,\qquad \varphi(a\,,\,b\,,\,c\,,\,C)=0\,,$$

et, par suite, des équations de la forme

(*) Je ne dis rien du cas où X serait égal à A divisée par un nombre abstrait, parce que ce cas rentre dans celui où n serait lui-même un nombre abstrait fractionnaire.

$$a=f(A\ ,\ B\ ,\ C)\ , \qquad C=f(a\ ,\ b\ ,\ c\ )\ ,$$

ne soient des équations tout-à-fait absurdes ; du moins tant qu'il n'y aura rien de sous-entendu sous le signe de fonction.

Mais si, pour qu'une équation entre grandeurs concrètes ne soit point absurde, il faut qu'elle renferme, tout au moins, deux grandeurs concrètes de chaque sorte : cette condition, toujours rigoureusement nécessaire, n'est pas néanmoins suffisante. Pour que celle d'entre ces grandeurs concrètes par rapport à laquelle on veut résoudre l'équation se trouve être égale à une autre grandeur concrète de même espèce qu'elle multipliée par un nombre abstrait, il est de plus nécessaire que cette équation soit séparément homogène par rapport à chacune des sortes de grandeurs concrètes dont elle se compose ; car, soit par exemple l'équation

$$2^{\text{mètres}}\times4^{\text{heures}}\times12^{\text{mètres}}=2^{\text{heures}}\times4^{\text{mètres}}\times12^{\text{heures}}\ ,$$

qu'un esprit peu attentif serait d'abord tenté de croire identique ; on peut l'écrire ainsi

$$12^{\text{mètres}}=2^{\text{heures}}\times\frac{12^{\text{heures}}}{4^{\text{heures}}}\times\frac{4^{\text{mètres}}}{2^{\text{mètres}}}=2^{\text{heures}}\times3\times2=12^{\text{heures}}\ ;$$

équation dont l'absurdité est manifeste, puisqu'elle exprime finalement que 12 mètres sont égaux à 12 heures.

En vain prétendrait-on objecter qu'on peut toujours, dans une équation, diviser chaque sorte de grandeur abstraite par son unité de mesure, et réduire ainsi l'équation à n'avoir simplement lieu qu'entre des nombres abstraits, et qu'ainsi si cette dernière est vraie, celle d'où on l'aura déduite ne pourra être réputée absurde. Observons, en effet, que, lorsqu'on dit que l'*unité ne multiplie ni ne divise*, cette proposition ne peut et ne doit s'entendre que de l'unité abstraite ; l'unité concrète est, en effet, tout-à-fait

à-fait arbitraire, et il n'est aucune grandeur concrète finie qui ne puisse être prise pour telle ; d'où il suit que vouloir étendre cette proposition aux grandeurs concrètes reviendrait à prétendre qu'on peut impunément, et sans lui faire subir aucun changement, multiplier ou diviser une quantité donnée par tout ce qu'on voudra ; et qu'on peut écrire, par exemple,

$$5^{\text{toises cubes}}=\frac{5^{\text{toises cubes}}}{1^{\text{toise linéaire}}}=\frac{5^{\text{toises cubes}}}{1^{\text{toise quarrée}}}=\frac{5^{\text{toises cubes}}}{1^{\text{toise cube}}},$$

c'est-à-dire,

$$5^{\text{toises cubes}}=5^{\text{toises quarrées}}=5^{\text{toises linéaires}}=5^{\text{unités abstraites}};$$

ou encore qu'on peut écrire

$$\frac{5^{\text{livres}}}{1^{\text{livre}}}=\frac{5^{\text{livres}}}{1^{\text{once}}}=\frac{5^{\text{livres}}}{1^{\text{gros}}}=\frac{5^{\text{livres}}}{1^{\text{denier}}}=\frac{5^{\text{livres}}}{1^{\text{grain}}},$$

c'est-à-dire,

$$5=80=640=1920=46080.$$

Lors donc que, dans la vue de réduire une équation à n'exister qu'entre des nombres abstraits, on divise chacun des elémens concrets dont elle se compose par son unité de mesure, pour que cette operation soit permise, il faut qu'elle revienne à diviser tous les termes de l'equation par une même quantité; ce qui ne peut évidemment avoir lieu qu'autant que, comme nous l'avons déjà dit, cette équation sera séparément homogène par rapport à chacune

des sortes de grandeurs concrètes dont elle se composera. Or, toute équation qui présente un sens raisonnable doit être réductible à une équation entre des nombres abstraits ; car, comme nous l'avons vu ci-dessus, toute équation qui présente un sens raisonnable est réductible à la forme $X=nA$, dans laquelle n est un nombre abstrait et A et X des grandeurs concrètes d'une même nature quelconque ; or, en écrivant cette équation sous cette forme

$$\frac{X}{A}=n,$$

on voit qu'en effet elle se réduit à une équation entre deux nombres abstraits ; puis donc que, d'un autre côté, une équation ne saurait, par des procédés légitimes, être amenée à ne contenir que des nombres abstraits, qu'autant qu'elle est homogène par rapport à chacune des grandeurs concrètes dont elle se compose en particulier ; il s'ensuit qu'une équation qui ne satisfait pas à cette dernière condition est une équation tout-à-fait absurde, à moins cependant que l'égalité n'ait lieu séparément entre diverses de ses parties prises séparément, et satisfaisant à cette même condition ; auquel cas ce ne serait plus proprement une équation unique, mais le système de plusieurs équations réunies dans une seule expression.

Je ne dirai donc pas, avec l'estimable antagoniste de M. Leslie, qu'on n'a jamais vu, dans les questions de mathématiques, les inconnues être autre chose que des nombres abstraits ; et je me bornerai simplement à convenir qu'on peut toujours, si l'on veut, faire en sorte que ces inconnues ne soient pas autre chose ; mais je conçois fort bien une équation entre grandeurs concrètes, de tant d'espèces différentes qu'on voudra, sous les conditions énoncées ci-dessus, et vous avez vous-même, Monsieur, donné plusieurs exemples de ces sortes d'équations, en l'endroit déjà cité. Je conçois

donc fort bien aussi que la solution d'un problème puisse donner, pour la grandeur concrète inconnue, une grandeur concrète de la même nature, multipliée par une fonction d'autres grandeurs concrètes de nature quelconque, pouvant finalement se réduire à un nombre abstrait.

Je ne dirai pas non plus, avec M. F. M., que l'art de l'analiste consiste à savoir écrire les questions de telle sorte que les inconnues soient des nombres abstraits parce que, d'une part, comme je crois l'avoir prouvé, cela n'est point du tout nécessaire, et que d'une autre, cela est toujours possible, lorsqu'il ne s'est glissé aucune erreur, soit dans le raisonnement, soit dans le calcul. La condition de pouvoir réduire les inconnues à devenir des nombres abstraits n'est donc au fond que la condition de bien raisonner, laquelle n'est pas plus particulière aux recherches mathématiques qu'à celles de toute autre nature. Mais je pense, comme vous, Monsieur, qu'il peut être utile de ne pas dépouiller les élémens d'une équation de leur qualité concrète; puisque c'est là un moyen aussi sûr que facile de découvrir, à la seule inspection, les erreurs de raisonnemens ou de calcul qui auraient pu se glisser dans la solution d'un problème; et c'est ainsi, par exemple, que nous avons ci-dessus reconnu l'absurdité d'une équation qui, en dépouillant les nombres de leur qualité concrète, nous aurait, au contraire, semblé identique.

Je ne pense pas que la doctrine que je viens d'établir, et qui ne saurait jamais souffrir d'exception, puisse présenter aucune difficulté, tant qu'on n'en voudra faire l'application qu'à des grandeurs simples, telles que des longueurs, des surfaces, des volumes, des temps, des angles, etc.; mais il est des cas où elle semble, au premier aspect, être en défaut, et ce sont ceux où l'on veut l'appliquer à certaines grandeurs complexes, fonctions de grandeurs simples, telles, par exemple, que des vitesses, des densités, des forces motrices, etc. Il semble, en effet, que les équations

$$E=VT, \quad M=VD, \quad F=MV,$$

que l'on rencontre en mécanique soient en opposition formelle avec ce qui précède ; puique non seulement elles ne sont pas homogènes par rapport à chacune des grandeurs concrètes entre lesquelles elles établissent des relations, mais que de plus chacune d'elles n'entre qu'une fois dans l'équation où elle se trouve. Mais toute difficulté disparaît en considérant que les mots vitesse, densité, force motrice, etc., ne sont que des dénominations introduites par abréviation dans la science, et auxquelles il faut toujours mentalement substituer les fonctions de grandeurs simples dont elles sont le symbole. Ainsi, par exemple, ce qu'on appelle vitesse, dans le mouvement uniforme, n'est au fond que le quotient de la division d'un espace parcouru par le temps employé à le parcourir ; désignant donc par e et t cet espace et ce temps, nous aurons

$$V=\frac{e}{t},$$

qui, substituée dans la première des équations ci-dessus, la change en celle-ci

$$E=\frac{e}{t}T=e\frac{T}{t},$$

qui rentre complètement dans notre règle, puisqu'elle donne un espace égal à un autre espace multiplié par le quotient de la division de deux temps, c'est-à-dire, par un nombre abstrait ; et il en serait de même pour les deux autres équations. Il est si vrai que les

vitesses, les densités et les forces motrices ne sont point proprement des grandeurs, mais seulement des combinaisons de grandeurs, que tandis qu'on est clairement entendu lorsqu'on dit une longueur de 3 mètres, une durée de 5 heures, un poids de 8 livres, on cesse au contraire de l'être lorsqu'on dit une vitesse de 3 mètres, une densité ou une force motrice de 8 livres, et que, pour rendre ces locutions intelligibles, il est indispensable d'ajouter à quel temps répond cette vitesse, à quel volume répond cette densité et à quelle vitesse répond cette force motrice.

Je dois presque m'excuser, Monsieur, auprès de vos lecteurs, pour les avoir arrêtés aussi long-temps sur des notions aussi élémentaires, je dirais presque aussi triviales; mais ce n'est pas ma faute si les traités élémentaires gardent tous le silence sur des choses qu'ils devraient tous contenir, et si, suivant l'expression de d'Alembert, on a beaucoup plus songé jusqu'ici à ajouter à l'édifice qu'à en éclairer l'entrée. Je me hâte de passer à l'objet principal de cette lettre, en reprenant, dans leur ordre, les objections opposées à la démonstration de M. Legendre.

I. Je crois avoir victorieusement établi, contre M. Leslie, que jamais aucune grandeur concrète ne saurait résulter d'un calcul exécuté sur d'autres grandeurs concrètes toutes d'une nature différente de la sienne; et je crois avoir prouvé en même temps que les équations de la mécanique, dont le physicien d'Edinbourg pensait pouvoir tirer avantage contre M. Legendre, ne dérogent aucunement à cette loi. Ainsi, point de doute d'abord que M. Legendre ne soit très-fondé à rejeter comme absurde l'équation $c=\mathrm{f}(A, B, C)$ ou son équivalente $C=\mathrm{F}(A, B, c)$.

II. Quoique je sois très-loin de prétendre, avec M. Legendre, que tout angle est un nombre abstrait, je n'en suis pas moins dans l'intime persuasion que M. Leslie est complètement dans l'erreur, lorsqu'il admet une exacte parité entre les angles et toutes les autres sortes de grandeurs concrètes. L'angle est, en effet, la seule

grandeur dont on puisse se former une idée absolue, une idée communicable par des mots, sans le secours d'aucune comparaison à d'autres grandeurs de la même nature; c'est aussi la seule grandeur qui soit nécessairement limitée dans ses accroissemens; car, bien que le calcul puisse souvent conduire à considérer des angles plus grands que quatre angles droits, il n'en demeure pas moins certain que l'usage que l'on fait des angles en géométrie n'exige jamais qu'on en emploie aucun qui excède cette limite. Que l'univers croisse ou décroisse dans une proportion constante quelconque, tout croîtra ou décroîtra suivant cette même proportion: les angles seuls demeureront invariables; et c'est même là le fondement de la similitude. En un mot, il n'y a, pour les angles, ni microscope ni télescope ni illusion optique; et le plus ou le moins d'intervalle qui nous en sépare ne change absolument rien à leur aspect. Lors donc qu'on dit que toutes nos connaissances roulent uniquement sur les rapports que les choses ont entre elles, cette proposition ne peut être admise que sous la condition de faire, à l'égard des angles, une exception formelle.

La parité que l'on voudrait établir entre l'angle droit, considéré comme mesure naturelle des angles, et le quart du méridien terrestre, considéré comme mesure naturelle des longueurs, ou encore la durée de la rotation diurne de notre terre, considérée comme mesure naturelle du temps, me paraît reposer sur une équivoque palpable, et ne saurait être sérieusement soutenue. Que veut-on dire, en effet, lorsqu'on dit que le quart du méridien terrestre et ses sous-multiples sont des unités de longueur prises dans la nature? Sinon que ce sont des unités qui ne sont pas plus particulières à une contrée de notre globe qu'à toute autre; que ce sont des unités que tous ceux qui l'habitent peuvent également regarder comme les leurs, parce qu'ils se trouvent tous en même situation par rapport à elles. Ce sont des unités prises dans notre nature humaine et terrestre; mais qui ne sont pas plus naturelles pour les habitans de Saturne ou de Jupiter que ne le serait pour

nous la longueur du quart du méridien de Jupiter ou de Saturne. Que, par un événement qu'on ne peut prévoir, les dimensions de notre globe viennent à éprouver quelque changement, et dès-lors notre mesure naturelle des longueurs cessera de l'être, parce que dès-lors nous vivrons sous l'empire d'une nature différente ; et tout ce que je dis ici du quart du méridien terrestre, considéré comme mesure naturelle des longueurs, peut être rigoureusement appliqué, *mutatis mutandis*, à la durée du jour et de ses parties, considérée comme mesure naturelle du temps.

La vérité est qu'au lieu de considérer l'angle droit comme la mesure naturelle des angles, il serait peut-être mieux, pour éviter toute équivoque, de dire que l'angle droit est une mesure des angles prise hors de la nature matérielle. Que l'on conçoive, en effet, tout l'univers anéanti, nos mesures prétendues naturelles des longueurs et des temps le seront avec lui ; mais pourvu qu'il reste, dans cet univers détruit, un plan fixe et indéfini et un être intelligent, cet être pourra encore se former une idée nette de l'angle droit, et créer même la géométrie rationnelle toute entière.

En un mot, si les angles ne présentent aucune différence intrinsèque avec toutes les autres sortes de grandeurs simples, qu'on essaye donc de découvrir dans l'étendue linéaire ou dans la durée indéfinie quelque nombre absolu, analogue au nombre π, que l'on déduit si naturellement de la considération des angles ?

III. Je passe à l'objection la plus grave peut-être. Comment, dit-on, si le raisonnement de M. Legendre était concluant, un raisonnement en tout pareil au sien, pourrait-il conduire à une conclusion évidemment absurde ? Examinons donc ce raisonnement qu'on prétend opposer à celui de M. Legendre.

On dit communément que l'on peut, par des formules analitiques, obtenir un angle d'un triangle en fonction de ses trois côtés ; mais, en s'énonçant ainsi, s'exprime-t-on d'une manière correcte ? je ne le pense pas. La formule connue

$$\text{Cos.}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

ou toute autre équivalente, ne donne pas l'angle, mais bien son cosinus, en fonction des trois côtés. Ce cosinus est-il tabulaire? c'est un nombre purement abstrait; et nous n'avons jamais prétendu nier qu'on ne pût deduire un tel nombre d'un calcul exécuté sur trois longueurs données. S'agit-il, au contraire, d'un cosinus graphique? dès-lors il y a un rayon R sous-entendu; et, en le restituant, la formule devient

$$\text{Cos.C}=R.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$

c'est-à-dire qu'elle donne une longueur égale à une autre longueur multipliée par un nombre abstrait, ce qui rentre exactement dans les principes que nous avons d'abord exposés.

Mais, dira-t-on, n'a-t-on pas

$$C=\text{Tang.}C-\tfrac{1}{3}\text{Tang.}^3C+\tfrac{1}{5}\text{Tang.}^5C-\tfrac{1}{7}\text{Tang.}^7C+\ldots\ldots;$$

n'a-t-on pas d'un autre côté

$$\text{Tang.}C=\frac{16\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{a^2+b^2-c^2};$$

n'en résulte-t-il pas

C=

$$C = \frac{16\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{a^2+b^2-c^2}$$

$$-\frac{1}{3}\left\{\frac{16\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{a^2+b^2-c^2}\right\}^3+\ldots\ldots ?$$

et ne voilà-t-il pas un angle du triangle exprimé uniquement en fonction de ses trois côtés ? ou encore ne voilà-t-il pas un angle égal à un nombre abstrait, suivant la doctrine de M. Legendre ?

Ce raisonnement tombe de lui-même, en remarquant qu'on ne parvient à la formule

$$C=\text{Tang.}C-\tfrac{1}{3}\text{Tang.}^3C+\tfrac{1}{5}\text{Tang.}^5C-\tfrac{1}{7}\text{Tang.}^7C+\ldots;$$

qu'en admettant, formellement ou tacitement, que l'angle tel que l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre est égal au rayon qui a servi à le décrire a été pris pour unité ; et cela est si vrai que, lorsqu'on est parvenu, par cette formule, à la valeur numérique et abstraite de l'angle C, on est indispensablement forcé d'avoir égard à cette convention, pour parvenir à la grandeur graphique de cet angle. En désignant donc par ω l'angle unité, si toutefois on veut que C soit un angle, notre formule sera véritablement

$$\frac{C}{\omega} = \frac{16\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{a^2+b^2-c^2}$$

$$-\frac{1}{3}\left\{\frac{16\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}{a^2+b^2-c^2}\right\}^3+\ldots;$$

qui rentre exactement dans les principes précédemment établis.

Je n'hésiterais donc pas à défier tous les géomètres de l'Europe, sans en excepter même M. Wronski, qui possède tant de merveilleux secrets en analise, de nous montrer une formule analitique, déduite d'un raisonnement rigoureux, dans laquelle un angle proprement dit, soit seul dans un membre, et dont l'autre soit une pure fonction de tant de droites qu'on voudra; à moins cependant que, comme dans la formule que je viens de discuter, on n'ait fait, soit implicitement, soit explicitement, quelque angle égal à l'unité. Un angle n'est donc pas et ne saurait être un nombre abstrait; il ne saurait se présenter sous cette forme qu'après qu'on a fait choix de l'angle unité; mais alors il n'a rien, en cela qui lui soit plus particulier qu'aux longueurs et aux temps, qui se présentent aussi sous la forme de nombres abstraits, dès qu'on a fait choix de leurs unités respectives. Que l'angle qui intercepte entre ses côtés un arc égal au rayon soit d'ailleurs, plus ou moins que l'angle droit, une mesure naturelle des angles; c'est là un point que je ne prétends nullement décider, et que je n'entreprendrai pas même discuter, attendu que cette question est tout-à-fait étrangère à mon sujet.

Nous voilà donc invinciblement ramenés à considérer comme absurde l'équation

$$C=\mathrm{f}(a,\ b,\ c)\ ;$$

du moins lorsqu'on n'y supposera rien de sous-entendu, et qu'on y considérera C comme un angle proprement dit; et cela pour les mêmes raisons qui ont fait rejeter, par M. Legendre, l'équation

$$c=\mathrm{f}(A,\ B\ ,\ C)\ ;$$

et, s'il en est ainsi, il nous faudra également rejeter l'équation

$$c=\mathrm{F}(a\,,\,b\,,\,C)\,,$$

de laquelle celle-là peut toujours être censée déduite ; mais faudra-t-il en conclure qu'on doit simplement avoir

$$c=\mathrm{F}(a\,,\,b)\;?$$

C'est là vraiment, ce me semble, que réside toute la difficulté de la question.

Dans la vue de l'éclaircir, distinguons bien deux sortes de déterminations ; savoir : des déterminations graphiques et des déterminations arithmétiques. Connaissant uniquement les trois côtés d'un triangle, nous pouvons en conclure graphiquement les trois angles du même triangle ; cela est incontestable ; mais arithmétiquement il nous est absolument impossible d'en déterminer un seul. A parler même exactement, ce n'est pas nous qui déterminons les angles d'un triangle, au moyen de ses trois côtés ; et, quoique ces angles résultent bien véritablement de nos opérations sur les côtés du triangle ; ils se déterminent en quelque sorte, d'eux-mêmes, et sans que nous ayons aucunement besoin de nous en occuper.

Nous pouvons dire aussi que nous ne faisons jamais graphiquement un angle égal à un angle donné ; car, quelque procédé qu'on emploie pour résoudre ce problème, il se réduit toujours finalement à faire en sorte que l'angle donné appartienne à un certain triangle, et à construire ensuite, au moyen de certaines longueurs, un autre triangle qui soit égal à celui-là.

En y réfléchissant donc sérieusement, on parviendra à se con-

vaincre que nos opérations graphiques ont uniquement des longueurs; mais jamais des angles pour objet. On peut remarquer aussi que, tandis que l'on peut graphiquement conclure certaines longueurs d'autres longueurs données, certains angles d'autres angles donnés et même certains angles de certaines longueurs données ; il est tout-à fait impossible, même graphiquement, de conclure de tant d'angles donnés qu'on voudra, une seule longueur qui ne soit pas tout-à-fait arbitraire et indéterminée ; nouvelle preuve qu'il n'y a pas entre les angles et les longueurs cette parité que M. Leslie a cru pouvoir admettre.

D'un autre côté, tandis qu'une longueur donnée et unique ne saurait jamais donner naissance à un nombre abstrait, déterminé pour chaque longueur, en particulier, et variant d'une longueur à l'autre ; un angle unique, au contraire, donne de lui-même naissance à une multitude de tels nombres, tels que les sinus, les cosinus, les rapports des arcs, de leurs cordes ou flèches au rayon, etc.; et cela sans qu'on ait aucunement besoin de statuer préalablement sur l'unité de mesure de ces angles ; et de même que ces nombres abstraits sont donnés par les angles auxquels ils répondent, ces mêmes angles peuvent à leur tour en être conclus. Ce n'est même qu'au moyen de ces nombres que nous opérons sur les angles ; car, par exemple, lorsque, dans la vue de faire un angle égal à un angle donné, nous construisons un triangle dont l'angle cherché fasse partie, et qui soit égal à un autre triangle, auquel l'angle donné se trouve appartenir, nous ne nous occupons pas proprement de la longueur absolue des côtés de ces deux triangles, mais seulement des rapports abstraits entre ces côtés.

Et c'est précisément dans ces considérations, comme l'observe fort bien M. F. M., qu'on trouvera la solution de la difficulté qui nous occupe. Quelle est donc la différence essentielle entre les deux équations

$$C=\mathrm{F}(A\,,B\,,c)\,;\qquad c=\mathrm{F}(a\,,b\,,C)\ ?$$

C'est que, si la première pouvait dépendre de c, ce côté c devrait y figurer en personne, s'il est permis de s'exprimer ainsi ; de sorte qu'elle conduirait à la conclusion absurde

$$c=\mathrm{f}(A\,,B\,,C)\,;$$

tandis que, dans l'autre, au contraire, l'angle C peut fort bien ne figurer que par quelqu'un des nombres abstraits ses représentans, et n'y peut même figurer que de cette manière, puisque nous ne faisons jamais des angles qu'avec des rapports de longueurs, c'est-à-dire, des nombres abstraits. Appelant donc n le nombre abstrait par lequel figure l'angle C dans la seconde équation ; cette équation reviendra à

$$c=\mathrm{F}(a\,,b\,,n)\,,\qquad \text{d'où}\qquad n=\mathrm{f}(a\,,b\,,c)\,;$$

qui n'implique aucune absurdité.

Mais ces considérations, en admettant même qu'elles dissipent complètement l'espèce de paradoxe qui fait le sujet de la troisième objection de M. Leslie, ne sont-elles pas prises en dehors de la question qui nous occupe ? Cette constance, pour un même angle, des divers nombres abstraits par lesquels les angles peuvent être représentés, n'est-elle pas une conséquence du principe de la similitude ? et ce principe lui-même ne présuppose-t-il pas, à son tour, celui que M. Legendre se propose d'établir ? En un mot,

n'y a-t-il pas ici quelque cercle vicieux ? C'est là une difficulté assez grave à laquelle l'estimable géomètre de Genève ne paraît pas avoir songé, et que je me contenterai d'abandonner à ses réflexions et à celle du lecteur.

IV. J'insisterai peu sur l'objetion qui consiste à savoir si les deux côtés *a*, *b* concourrent réellement en un point, quelle que soit la longueur du troisième côté *c*. M. F. M. a très-bien observé que cette objection, recevable si les deux angles *A*, *B* étaient pris au hasard, cesse de l'être dès qu'on suppose qu'ils appartiennent à un triangle effectif.

V. Qnant à la dernière objection, j'avoue qu'elle m'embarrasserait peu s'il ne me restait aucun scrupule sur la démonstration de M. Legendre. C'est sans doute, sous le point de vue philosophique, une question d'un grand intérêt que celle de savoir pourquoi on ne peut quelquefois, par certaines méthodes, atteindre à des vérités qui se montrent au contraire facilement accessibles à d'autres manières de raisonner ; mais enfin, lorsque ces dernières conduisent surement au but, la vérité n'en est pas moins solidement établie. Avant Lagrange, on ne voyait pas trop clairement d'où naissait l'immense avantage des notations différentielles sur les procédés de l'ancienne géométrie, et cependant on n'en avait pas moins admis sans contestation les résultats nombreux et nouveaux, pour la plupart, auxquels l'emploi de ces notations avait conduit. Il est peut-être même aujourd'hui très-peu de géomètres qui ne soient pas dans le même cas à l'égard des procédés du calcul des variations, et on n'en trouverait pas sans doute un grand nombre qui sauraient traduire les méthodes de ce calcul en procédés purement géométriques ; ce qui n'empèche pas cependant que tous ne s'abandonnent à ces procédés sans la moindre hésitation, sans le moindre scrupule ; parce que tous ceux qui en font usage sont bien certains de la rigueur des principes qui leur servent de base.

VI. Il est encore une objection que personne n'a jamais songé à opposer à M. Legendre, et qui pourtant n'est pas moins sérieuse

que les autres. On n'est point encore parvenu à démontrer nettement jusqu'ici qu'une équation algébrique, à une seule inconnue, dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière, soit toujours résoluble par rapport à cette inconnue, et cependant la démonstration de M. Legendre admet qu'une équation dont la forme même est supposée inconnue ; et qui peut conséquemment renfermer des transcendantes dont nous n'avons jamais rencontré de modèles, est néanmoins indistinctement résoluble par rapport à l'un quelconque des élémens dont elle se compose.

La conclusion que je crois pouvoir tirer de tout ceci, c'est que quand même on parviendrait à prouver que la démonstration de M. Legendre est tout-à-fait rigoureuse, ce que je me garderais bien de garantir, et ce qui, tout au moins, reste encore à faire ; cette démonstration reposerait sur des principes trop délicats, et serait sujette à des objections trop graves et trop nombreuses pour pouvoir être regardée autrement que comme un objet de pure curiosité. Je pense donc qu'il vaut encore mieux en revenir aux idées de Bertrand sur la nature de l'angle, et démontrer le théorème dont il s'agit, comme vous l'avez fait vous-même, Monsieur, à la page 356 de votre troisième volume.

En m'exprimant ainsi, je suis loin, au surplus, de prétendre proscrire absolument l'usage de la notation fonctionnelle dans la démonstration des théorèmes de géométrie ; mais j'inclinerais du moins à penser qu'il convient de ne l'employer qu'avec beaucoup de circonspection, toutes les fois que les raisonnemens doivent avoir des angles pour objet.

Agréez, etc.

Lyon, le 15 de novembre 1819.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration de la fausseté du théorème énoncé à la page 320 du IX.e volume de ce recueil ;

Par M. Frédéric Sarrus.

Le théorème dont il s'agit consiste en ce que tout nombre impair $2n+1$ serait ou ne serait pas premier, suivant que l'un des deux nombres 2^n-1, 2^n+1 serait ou ne serait pas divisible par $2n+1$.

En cherchant à démontrer cette proposition, je l'ai trouvée en défaut pour le nombre 341.

On a, en effet,

$$2^5-1=31\,,\quad 2^5+1=33\,;\quad \text{d'où}\quad 2^{10}-1=31.33=341.3\,;$$

donc

$$2^{10}=341.3+1\,;$$

et par suite

$$2^{170}=(341.3+1)^{17}\,,$$

si

si l'on développe le second membre de cette équation, tous les termes de son développement excepté le dernier 1 seront divisibles par 341; de sorte qu'on peut écrire

$$2^{170}=341k+1 \ ,$$

k désignant un nombre entier; or, de là résulte

$$2^{170}-1=341k \ ;$$

ainsi, $2^{170}-1$ est divisible par 341, bien que ce nombre ne soit pas premier.

Il est donc certain que l'une des deux formules 2^n-1 et 2^n+1 peut être divisible par le nombre impair $2n+1$, sans que ce nombre soit premier; mais il n'en demeure pas moins certain que, lorsque ce nombre est premier, il divise nécessairement l'une ou l'autre de ces deux formules; ce qu'on peut prouver assez simplement comme il suit.

Soit p un nombre premier quelconque, on aura

$$2^p=(1+1)^p=1+\frac{p}{1}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}+\ldots\ldots+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}+\frac{p}{1}+1 \ ;$$

d'où

$$2^p-2=\frac{p}{1}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}+\ldots$$

$$+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}+\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}+\frac{p}{1} \ ;$$

Tous les termes du second membre de cette équation sont, comme l'on sait des nombres entiers. De plus, ils sont tous divisibles par p, qui ne saurait se trouver au dénominateur d'aucun d'eux, donc 1.° lorsque p est premier

$$\frac{2^p-2}{p}$$

est un nombre entier.

Supposons présentement que le nombre premier p soit un nombre impair de la forme $2n+1$, en substituant dans la formule elle deviendra

$$\frac{2(2^{2n}-1)}{2n+1}=\frac{2.(2^n-1)(2^n+1)}{2n+1};$$

or, 2 ne pouvant être divisible par le nombre premier impair $2n+1$, il faut que ce soit le produit $(2^n-1)(2^n+1)$, et par suite l'un ou l'autre de ses facteurs 2^n-1, 2^n+1 qui soit divisible par ce diviseur.

N'aurons-nous donc rien de plus simple que le théorème de Wilson, pour juger, *à priori*, si un nombre donné est ou n'est pss premier? Il nous paraît du moins que son procédé est susceptible d'abréviations notables. Dabord comme tout nombre composé a toujours au moins un diviseur premier moindre que la racine du quarré le plus approchant en plus; on voit que N étant un nombre donné, et g, h deux nombres premiers consécutifs, tels que $g^2<N$ et $h^2>N$; si l'on fait le produit $P=1.2.3.5.7.11.....g$ des nombres premiers, jusqu'à g inclusivement; suivant que P et N auront ou n'auront pas un commun diviseur, N sera composé au premier : on peut même, dans ce produit, supprimer les facteurs 2.3.5, attendu que ces facteurs se reconnaissent dans un nombre à la première inspection.

Ainsi, par exemple, puisque 400 est le quarré de 20, il suffira, pour reconnaître si un nombre inférieur à 400 ou même à 441 est composé ou premier, de chercher s'il a ou n'a pas un diviseur commun avec 32323=7.11.13.17.19.

A la vérité, ceci suppose qu'on a une table des nombres premiers qui s'étend au moins jusqu'à $\sqrt{N}$; mais si l'on était privé d'une pareille table, on en serait seulement réduit à substituer au produit des nombres premiers le produit 7.11.13.17.19.23.25.29.31.35.37...... des nombres de la forme $6n\mp1$ qui, comme l'on sait, comprend tous les nombres premiers (*).

(*) Nous nous sommes assurés que la loi dont M. Sarrus vient de démontrer la fausseté se soutient pour les 70 premiers nombres naturels : peut-être même se soutient-elle beaucoup au-delà ; et c'en est assez pour montrer quel fond on doit faire sur l'*induction*, même en mathématiques.

Il serait curieux de savoir quel est le plus petit nombre composé pour lequel elle est en défaut ; et quelle est la forme générale des nombres pour laquelle elle est fausse.

Nous saisissons cette occasion pour observer que, dans l'impression du mémoire de M. Sarrus, inséré à la pag. 33 de ce volume, il s'est glissé diverses erreurs, dont une très-grave et de nature à le rendre inintelligible : en voici la correction.

Page 37, ligne 3, pour $+a_n\dfrac{dA_m}{da_m}$; *lisez* : $+a_n\dfrac{dA_m}{da_n}$.

ligne 7 ; pour 2^n, *lisez* : $2n$.

Page 48, lignes 4, 5, 6, 8 ; les premiers membres qui sont a_1, $2a_1$, $3a_1$, ... na_1, doivent être a_1A_1, $2a_1A_2$, $3a_1A_3$, ... na_1A_n.

Page 49, ligne 3, au dernier terme ; $n+a$, *lisez* : $n+2$.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes d'analise.

On propose de démontrer les deux formules que voici ;

$$\text{Arc.}(\text{Tang.}=x)=\left\{\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4+\ldots\right\},$$

$$\text{Arc.}(\text{Tang.}=x)=x-\frac{x}{3}\left\{\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2}{5}.\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{2.4}{5.7}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^3+\frac{2.4.6}{5.7.9}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4+\ldots\right\}?$$

Problème de probabilité.

On a mal compté n fois consécutivement les écus qui se trouvaient contenus dans un sac ; et l'on a obtenu les nombres a_1, a_2, a_3, ... a_n. On demande, 1.° quelle est la probabilité que le nombre de ces écus est a ? 2.° quel est le plus probablement le nombre des écus de ce sac ? 3.° quelle est enfin la probabilité que ce nombre d'écus le plus probable est le véritable ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur le développement, en fractions continues, des racines des equations du troisième degré, et sur l'approximation graphique du problème de la trisection de l'angle.

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS.



I. NOUS allons prouver, en premier lieu, qne la résolution d'une équation quelconque du troisième degré peut toujours être ramenée à celle d'une autre équation de la forme

$$4x^3-3x=a\,,$$

où a est un nombre positif.

En effet, la proposée ne saurait être, après l'évanouissement du second terme, que de l'une ou de l'autre de ces deux formes

$$y^3-py+q=0\,,\qquad y^3+py+q=0\,,$$

où il est permis de supposer que p et q sont des nombres entiers; et où q est un nombre essentiellement positif.

Si c'est la première forme qui a lieu, il suffira de poser

$$y=\pm 2x\sqrt{\frac{p}{3}}\,,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu suivant que q

est négatif ou positif. En substituant et divisant ensuite par $\pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, il viendra, en effet, en transposant,

$$4x^3-3x=\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}\,;$$

qui, en faisant $\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}=a$, devient, en effet,

$$4x^3-3x=a\,.$$

Si l'équation est de la seconde forme, on posera d'abord

$$y=\pm2z\sqrt{\frac{p}{3}}\,;$$

ce qui donnera, en substituant et divisant toujours par $\pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$,

$$4z^3+3z\pm\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}=0\,.$$

posant ensuite, dans celle-ci

$$z=\sqrt{x^2-1}\,;$$

ce qui revient, au surplus, à faire immédiatement

$$y=\pm2\sqrt{\frac{p}{3}(x^2-1)}\,,$$

elle deviendra

$$(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}=\mp\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}\,;$$

ou, en quarrant

$$(4x^2-1)^2(x^2-1)=\frac{27q^2}{4p^3}\,;$$

ou, en développant

$$(4x^3-3x)^2-1=\frac{27q^2}{4p^3};$$

ou enfin, en transposant et extrayant la racine quarrée des deux membres.

$$4x^3-3x=\sqrt{1+\frac{27q^2}{4p^3}};$$

équation qui, en posant, $\sqrt{1+\frac{27q^2}{4p^3}}=a$, revient encore à

$$4x^3-3x=a.$$

Il n'y aurait donc d'exception que pour le seul cas où la proposée aurait ses trois racines égales. Alors, en effet, p, qui entre comme dénominateur dans nos formules, se trouve nul, ce qui y introduit des grandeurs infinies.

Soit, par exemple, l'équation

$$y^3-7y+7=0,$$

qui se rapporte à la première forme, en posant

$$y=-2x\sqrt{\tfrac{7}{3}},$$

elle deviendra

$$4x^3-3x=\frac{3\sqrt{21}}{14},$$

où $a=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

Soit encore l'équation

$$y^3+y-10=0;$$

qui se rapporte à la seconde forme; en posant

$$y=2\sqrt{\frac{y^2-1}{3}},$$

elle deviendra

$$4y^3-3y=26\ ;$$

ou $a=26$.

II. Noûs allons prouver présentement que l'on peut faire dépendre la résolution de l'équation $4x^3-3x=a$ de celle d'une équation de la même forme, dans laquelle le second membre sera si voisin de l'unité qu'on voudra. Posons, en effet,

$$x=2x_1{}^2-1\ ,$$

en substituant dans

$$4x^3-3x=a\ ;$$

elle deviendra

$$(4x_1{}^3-3x_1)^2=\frac{1+a}{2}\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{1+a}{2}}=a_1\ ,$$

et extrayant la racine quarrée, l'équation à résoudre sera

$$4x_1{}^3-3x_1=a_1\ ,$$

équation exactement de même forme que la proposée. Or, de l'équation

$$\sqrt{\frac{1+a}{2}}=a_1\ ,$$

on tire, en quarrant, chassant le dénominateur et transposant

$$2a_1^2=a+1\ ,$$

ou

$$2(a_1^2-1)=a-1\ ;$$

d'où

$$\frac{a_1-1}{a-1}=\frac{1}{2(a_1+1)}\ ,$$

et par conséquent

$$\frac{a_1-1}{a-1}<\tfrac{1}{2}\quad\text{ou}\quad a_1-1<\tfrac{1}{2}(a-1)\ ;$$

la différence de a_1 avec l'unité sera donc moindre que la moitié de la différence de a avec l'unité.

Donc, si l'on pose successivement

$$x=2x_1^2-1\ , \qquad a_1=\sqrt{\frac{1+a}{2}}\ ,$$

$$x_1=2x_2^2-1\ , \qquad a_2=\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}\ ,$$

$$x_2=2x_3^2-1\ ; \qquad a_3=\sqrt{\frac{1+a_2}{2}}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1}=2x_n^2-1\ , \qquad a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}\ ;$$

on aura, quel que soit d'ailleurs l'indice n,

$$4x_n^3-3x_n=a_n\ ;$$

et la série a, a_1, a_2, ...a_n sera telle que la différence de chacun de ses termes avec l'unité sera moindre que la moitié de

la différence avec cette même unité du terme qui le précédera immédiatement.

Il n'est pas même difficile de voir que, passé le premier terme dans la série des différences $a-1$, a_1-1, a_2-1, ... a_n-1, chaque terme sera reellement moindre que le tiers de celui qui le précedera immediatement. En effet, il resulte des relations ci-dessus qu'aucun des termes a_1, a_2, a_3, ... a_n ne saurait être inférieur à $\frac{1}{2}$ et qu'ils seront même toujours plus grands que cette fraction; on a donc

$$a_n > \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$a_n + 1 > \tfrac{3}{2},$$

et

$$2(a_n+1) > 3,$$

donc

$$\frac{1}{2(a_n+1)} < \tfrac{1}{3};$$

mais on a, en général, par ce qui précède,

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} < \frac{1}{2(a_n+1)};$$

donc, *à fortiori*,

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} < \tfrac{1}{3}, \quad \text{ou} \quad a_n-1 < \tfrac{1}{3}(a_{n-1}-1).$$

comme nous l'avions annoncé.

Cette circonstance facilite singulièrement le calcul des quantités a_1, a_2, a_3, ... a_n. On sait, en effet, que, lorsque i est une très-petite fraction, on a sensiblement $\sqrt{1 \pm i} = 1 \pm \frac{1}{2} i$; d'où l'on voit que, lorsqu'on sera parvenu à des termes très-peu différens

de l'unité, on pourra poursuivre en remplaçant l'extraction de la racine de la quantité sous le radical par la réduction à moitié de sa différence avec l'unité.

Il résulte de là que dans la série $a-1$, a_1-1, a_2-1, ... a_{n-1}, chaque terme, que nous venons déjà de démontrer être moindre que le tiers de celui qui le précède immédiatement, tend sans cesse à n'en être plus que le quart. Soit, en effet, $a_{n-1}=1+i$, i étant une très-petite fraction, nous aurons

$$a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}=\sqrt{\frac{2+i}{2}}=\sqrt{1+\tfrac{1}{2}i}\ ;$$

ce qui donnera sensiblement $a_n=1+\frac{1}{4}i$; on aura donc, aussi sensiblement,

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=\frac{\frac{1}{4}i}{i}=\frac{1}{4}\ ;$$

ainsi, parvenue à ce point, la série $a-1$, a_1-1, a_2-1, ... a_n-1 sera facile à continuer, et on en conclura ensuite les termes correspondans à la série a, a_1, a_2, a_3, ... a_n.

On peut remarquer présentement que, si l'on avait rigoureusement

$$4x_n^3-3x_n=1\ ,$$

on en conclurait, en transposant et décomposant,

$$(2x_n+1)^2(x_n-1)=0\ ;$$

d'où l'on voit que, tandis que l'une des racines des diverses transformées converge sans cesse vers l'unité ; les deux autres convergent en même temps vers la fraction $-\frac{1}{2}$. On pourra donc, passé un certain terme, tirer un parti avantageux de la méthode d'approximation de *Newton*, pour résoudre la dernière transformée, et re-

monter ensuite à la valeur de x, au moyen des relations établies ci-dessus entre x, x_1, x_2, x_3, ... x_n.

III. A l'aide de ces relations, la valeur de x peut être développée en fraction continue d'une forme fort élégante. L'équation $4x_n^3-3x_n=a_n$ donne, en transposant,

$$4x_n^3=3x_n+a_n\ ;$$

mais l'équation $x_{n-1}=2x_n^2-1$, donne aussi, en transposant,

$$2x_n^2=x_{n-1}+1\ ;$$

divisant donc la première par la seconde, il viendra

$$2x_n=\frac{3x_n+a_n}{x_{n-1}+1}\ ;$$

ou, en chassant le dénominateur, réduisant et transposant

$$2x_nx_{n-1}=x_n+a_n\ ;$$

d'où on tire

$$2x_{n-1}=1+\frac{a_n}{x_n}=1+\frac{2a_n}{2x_n}\ ;$$

on aura donc cette suite d'équations

$$2x=1+\frac{2a_1}{2x_1}\ ,$$

$$2x_1=1+\frac{2a_2}{2x_2}\ ,$$

$$2x_2=1+\frac{2a_3}{2x_3}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2x_{n-1}=1+\frac{2a_n}{2x_n}\ ;$$

d'où on conclura facilement

$2x=1+$

$$2x=1+\cfrac{2a_1}{1+\cfrac{2a_2}{1+\cfrac{2a_3}{1+\cdots\cdots\cdots+\cfrac{2a_{n-1}}{1+\cfrac{2a_n}{2x_n}}}}}\,;$$

fraction continue qui tendra continuellement à se résoudre dans la fraction périodique

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cdots\cdots\cdots}}}$$

que l'on trouve être égale à 2 ; de sorte qu'en poussant le développement assez loin, on peut, sans erreur sensible, écrire

$$2x=1+\cfrac{2a_1}{1+\cfrac{2a_2}{1+\cfrac{2a_3}{1+\cdots\cdots\cdots+\cfrac{2a_{n-1}}{1+a_n}}}}\,.$$

IV. Le problème de la trisection de l'angle se réduisant, comme l'on sait, à la résolution d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible ; les formules que nous venons d'obtenir sembleraient pouvoir en offrir une solution approchée ; mais elle ne saurait être d'aucune utilité dans l'application aux arts. Heureusement on peut obtenir de ce problème une solution graphique à la fois très-simple et très-convergente.

On a, en effet, par les théorèmes connus,

$$\text{Sin}.3a\text{Cos}.a-\text{Cos}.3a\text{Sin}.a=\text{Sin}.(3a-a)=\text{Sin}.2a=2\text{Sin}.a\text{Cos}.a\,,$$

ou bien, en transposant,

$$\text{Sin.}a(2\text{Cos.}a+\text{Cos.}3a)=\text{Cos.}a\text{Sin.}3a\ ,$$

d'où

$$\text{Sin.}a=\frac{\text{Sin.}3a\text{Cos.}a}{2\text{Cos.}a+\text{Cos.}3a}=\frac{\text{Sin.}3a}{2+\dfrac{\text{Cos.}3a}{\text{Cos.}a}}\ . \qquad (1)$$

Cela posé, considérons la formule

$$\text{Sin.}x_1=\frac{\text{Sin.}3a}{2+\dfrac{\text{Cos.}3a}{\text{Cos.}x}}\ ; \qquad (2)$$

on en tirera, en prenant les différentielles logarithmiques

$$\frac{\text{d}x_1\text{Cos.}x_1}{\text{Sin.}x_1}=-\frac{\text{d}x\text{Cos.}3a\text{Sin.}x}{\left(2+\dfrac{\text{Cos.}3a}{\text{Cos.}x}\right)\text{Cos.}^2x}\ ;$$

ou en mettant pour $2+\dfrac{\text{Cos.}3a}{\text{Cos.}x}$ sa valeur donnée par l'équation (1), et tirant la valeur de $\dfrac{\text{d}x_1}{\text{d}x}$,

$$\frac{\text{d}x_1}{\text{d}x}=-\frac{\text{Cos.}3a}{\text{Sin.}3a}\cdot\frac{\text{Sin.}x\ \text{Sin.}^2x_1}{\text{Cos.}^2x\text{Cos.}x_1}\ ;$$

mais, en comparant les équations (1, 2), on voit que, lorsque $x=a$, on a $x_1=x=a$; donc, dans ce même cas, la valeur de $\dfrac{\text{d}x_1}{\text{d}x}$ devient

$$-\frac{\text{Tang.}^3 a}{\text{Tang.}3a}\ .$$

Donc si, dans la formule (1), on fait $x=a+g$ et $x_1=a-h$, g étant un très-petit arc, on aura sensiblement

$$h=g\cdot\frac{\text{Tang.}^3a}{\text{Tang.}3a}\,.$$

Cette expression devenant également nulle, soit que $3a$ soit nul, soit qu'il soit égal à l'angle droit; elle doit être susceptible d'un *maximum* entre ces deux limites. Si, dans la vue de le déterminer, on égale à zéro la différentielle de $\frac{\text{Tang.}^3a}{\text{Tang.}3a}$, il viendra, en supprimant le dénominateur et divisant par $\text{Sin.}^2a\text{Cos.}^2a$,

$$(\text{Cos.}3a\text{Cos.}a-\text{Sin.}3a\text{Sin.}a)(\text{Sin.}3a\text{Cos.}a-\text{Cos.}3a\text{Sin.}a)=0\,;$$

ou bien

$$\text{Sin.}2a\text{Cos.}4a=0\,;$$

ou simplement

$$\text{Cos.}4a=0\,,$$

puisque $\text{Sin.}2a=0$ répondrait au *minimum*. On aura donc, dans le cas du *maximum*,

$$4a=\tfrac{1}{2}\varpi\,,\quad \text{d'où}\quad \text{Cos.}2a=\text{Cos.}\tfrac{1}{4}\varpi=\frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

de là

$$\text{Tang.}a=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}2a}{1+\text{Cos.}2a}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}-1\,;$$

d'où

$$\text{Tang.}^3a=5\sqrt{2}-7\,;$$

on aura d'ailleurs, dans ce cas,

$$\text{Tang.}3a=\text{Cot.}a=\frac{1}{\text{Tang.}a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\,;$$

donc finalement on aura, dans le cas du *maximum*;

$$\frac{\text{Tang.}^3 a}{\text{Tang.}3a}=(5\sqrt{2}-7)(\sqrt{2}-1)=17-12\sqrt{2}<0,0294<\frac{1}{11};$$

c'est à-dire

$$h<\frac{8}{33};$$

d'où il suit que, dans la formule (2), en mettant pour x une valeur qui diffère peu de a, la valeur qui en résultera pour x_1 ne diffèrera de a que d'une quantité au moins 33 fois plus petite; de sorte qu'en remettant cette nouvelle valeur pour x dans la même formule, et poursuivant toujours ainsi, on obtiendra une suite de valeurs x, x_1, x_2, x_3, ... convergente vers a, telles que, dans le cas même le plus défavorable, la différence de chacune avec a sera plus de 33 fois moindre que la différence avec le même arc de celle qui la précédera immédiatement.

Il n'est donc plus question que de trouver une construction qui réponde à ces indications, et représente la formule (2); or, c'est là une chose extrêmement facile. Soit, en effet, ASB (fig. 1) un angle donné égal à $3a$, qu'il soit question de diviser en trois parties égales. De son sommet S comme centre, et avec un rayon arbitraire, soit décrit, entre ses côtés, un arc MN. Par le même sommet, soit élevée à l'un quelconque SA de ses côtés, et dans le sens de l'autre, la perpendiculaire SC, sur laquelle soit prise, à partir du point S une partie SD à peu près égale à la corde des deux tiers de l'arc MN; aux deux tiers de sa corde, par exemple. Du point D comme centre, et avec un rayon double de SM=SN, soit décrit un arc coupant en E le prolongement de SA; et soit menée NE, coupant SC en D_1; alors SD_1 sera une valeur plus approchée de la corde des deux tiers de l'arc MN; substituant donc le point D_1 au point D, on obtiendra, par un semblable procédé, un nouveau point D_2, tel que SD_2 sera une

valeur beaucoup plus approchée encore ; en poursuivant donc toujours ainsi, on parviendra très-rapidement à une valeur extrêmement approchée de la corde des deux tiers de MN.

Cette construction est extrêmement facile à justifier ; soit, en effet, mené le sinus NP, et soit pris pour unité de longueur le rayon SM=SN ; d'où DE=2 ; en nommant $2x$ et $2x_1$ les arcs qui répondent aux cordes dont les longueurs sont SD et SD_1, on aura

$$2\text{Sin}.x_1=SD_1=NP.\frac{SE}{PE}=\text{Sin}.3a\frac{SE}{SE+\text{Cos}.3a}=\frac{2\text{Sin}.3a}{2+\frac{2\text{Cos}.3a}{SE}};$$

mais on a

$$SE=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{SD}^2}=\sqrt{4-4\text{Sin}.^2x}=2\text{Cos}.x\ ;$$

donc, en substituant et réduisant,

$$\text{Sin}.x_1=\frac{\text{Sin}.3a}{2+\frac{\text{Cos}.3a}{\text{Cos}.x}},$$

qui est précisément notre formule (2)

Dans cette trisection, qui est plus simple, en quelque sorte, qu'une bissection, on peut, sans inconvénient, placer, dès l'abord, le point D d'une manière tout-à-fait arbitraire, et conséquemment le placer en S, ce qui est plus simple ; et dès la seconde opération, l'erreur sera déjà peu sensible. On voit par là que, si l'on s'était trompé dans quelque opération, l'opération qui suivrait corrigerait aussitôt ce que celle-là aurait donné de défectueux ; ainsi qu'il arrive dans la méthode d'approximation de Newton pour les racines incommensurables des équations numériques.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration d'un théorème de géométrie ;

Par M. VECTEN, licencié ès sciences, ancien professeur de mathématiques spéciales.

THÉORÈME. Soit ABC (fig. 2) un triangle quelconque dans lequel soient menées les droites divisant les angles en deux parties égales, que l'on sait se couper en un même point O, et que nous supposons se terminer aux côtés respectivement opposés en D, E, F. Par les sommets soient menées des perpendiculaires à ces droites, rencontrant les prolongemens des côtés respectivement opposés en G, H, K. Sur DG, EH, FK comme diamètres soient décrits des cercles, dont les centres soient respectivement L, M, N.

1.° Les trois points G, H, K, seront en ligne droite ; 2.° les trois cercles passeront par les deux mêmes points P, Q ; d'où il suit 3.° que leurs trois centres L, M, N seront également en ligne droite.

Démonstration. Si l'on conçoit trois droites EF, FD, DE, que nous ne menons pas, pour ne point compliquer la figure, il est connu (*) qu'elles concourront avec les prolongemens des côtés BC, CA, AB, en trois points G, H, K, qui appartiendront à une même ligne droite, et l'on aura

(1) Voyez la page 296 de ce volume.

BD : CD : : BG : CG ,

CE : AE : : CH : AH ,

AF : BF : : AK : BK .

Mais si, sur DG comme diamètre, on décrit une circonférence, on sait que cette ligne est le lieu des sommets de tous les triangles qui ont pour base BC et qui sont tels que, si l'on tire du sommet de l'angle opposé à BC une droite au point D situé sur ce côté, cette ligne divisera l'angle d'où elle part en deux parties égales; donc la circonférence décrite sur DG passera par le point A; d'où il suit qu'en menant AG, cette ligne sera perpendiculaire sur AD. On démontrerait de même que les circonférences décrites sur EH, FK passent respectivement par les sommets B, C, et que les droites BH, CK sont respectivement perpendiculaires sur BE, CF. Or, nous avons rappelé plus haut que les trois points G, H, K sont en ligne droite; la première partie du théorème se trouve donc ainsi démontrée.

Pour démontrer la seconde, nous allons d'abord supposer qu'on a décrit les deux circonférences DAG, EBH, se coupant en P, Q, et faire voir que la troisième FCK passe par ces deux mêmes points.

En effet, si l'on conçoit des droites PA, PB, PC, que nous sous-entendons, pour ne point trop compliquer la figure; à cause que le point P est à la fois sur les deux circonférences DAG, EBH, on aura

BD : DC : : BP : PC ,   AE : EC : : AP : PC ,

d'où

$AE\times DC : EC\times BD$: AP : : BP ;

mais on a

$$AE \times DC \times BF = CE \times BD \times AF,$$

ce qui revient à

$$AE \times DC : CE \times BD :: AF : BF;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$AF : BF :: AP : BP;$$

ce qui démontre que le point P est sur la troisième circonférence; et on en dirait autant du point Q. La seconde partie du théorème se trouve donc également démontrée.

La droite qui joindrait les points P, Q serait donc une corde commune aux trois cercles; la perpendiculaire sur son milieu contiendrait donc leurs centres; ces centres sont donc en ligne droite, comme l'annonce la troisième partie du théorème.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

*Solution et construction géométrique du XXIV.e problème de l'*arithmétique universelle *de* NEWTON;

Par M. GERGONNE.



LE premier des trois problèmes de mathématiques proposés cette année au concours général des colléges royaux de la Capitale, m'a rappelé que j'avais résolu et construit depuis long-temps, d'une manière qui me paraît assez simple le XXIV.e problème de l'*Arithmétique*

l'*Arithmétique universelle* de NEWTON, sur lequel les auteurs d'élémens sont si souvent revenus, et qui a quelque analogie avec celui-là. Je vais exposer ici la solution que j'ai obtenue de ce problème, telle que je la donne chaque année dans mes cours ; après en avoir, toutefois, un peu généralisé l'énoncé.

PROBLÈME. Deux droites indéfinies, se coupant sous un angle quelconque, étant données de position sur un plan, et un point du même plan étant donné de position par rapport à ces droites : on propose de mener, par le point donné, une droite indéfinie de telle sorte que sa partie interceptée entre les deux droites données soit égale à une longueur donnée ?

Thèse. XX′, YY′ (fig. 3), se coupant sous un angle quelconque en O, sont les deux droites indefinies données de position ; P est le point donné de position par rapport à ces droites, dans l'angle XOY ; et par lequel il s'agit de mener une droite de telle manière que sa partie AB, comprise entre les deux droites données, soit égale à une longueur donnée *c*.

Discussion. Avant d'entreprendre de résoudre un problème de géométrie, il est souvent utile d'en examiner attentivement les diverses circonstances, de manière à s'assurer à l'avance du résultat qu'on doit s'en promettre. Livrons-nous donc à cette discussion pour le présent problème.

On voit d'abord qu'il est impossible de mener par le point P, une droite qui ait une partie finie interceptée entre les côtés de l'angle X′OY′ ; ainsi le problème ne saurait avoir de solution dans l'opposé au sommet de l'angle qui contient le point donné.

Si, par le point P, on mène deux droites, l'une passant par O et l'autre parallèle à XX′ ; leurs parties interceptées entre les côtés de l'angle YOX′ seront nulle pour la première et infinie pour l'autre. Si donc on conçoit que la première tourne autour du point P en se rapprochant sans cesse de la seconde, sa partie interceptée entre les côtés de l'angle YOX′ croîtra par degrés in-

sensibles depuis zéro jusqu'à l'infini; d'où il suit que, quelle que puisse être la longueur donnée c, il y aura toujours une position intermédiaire de cette droite mobile pour laquelle la partie interceptée sera égale à cette longueur; et, comme on pourrait évidemment dire les mêmes choses de l'angle XOY'; il en faut conclure que le problème a toujours nécessairement une solution effective dans chacun des deux supplémens de l'angle qui contient le point P; reste donc à savoir ce qui se passera dans cet angle même.

Remarquons d'abord qu'on ne saurait, par le point P, mener une droite dont la partie interceptée entre les côtés de l'angle XOY fût nulle, ni même d'une petitesse donnée; c'est-à-dire, que cette partie interceptée est ici susceptible d'un *minimum*. Supposons donc, pour un moment, que ce *minimum* réponde à la position AB; dans quelque sens que l'on fasse tourner cette droite AB autour du point P, sa partie interceptée dans l'angle XOY croîtra, dans l'un et l'autre cas, par degrés insensibles, jusqu'à pouvoir devenir infinie; d'où il suit que, dans l'angle XAY, il y aura deux solutions, tant que la longueur donnée c surpassera celle qui convient au *minimum*; une seule, lorsqu'elle lui sera précisément égale; et aucune lorsqu'elle lui sera inférieure; c'est-à-dire, qu'en général il peut indistinctement y avoir deux solutions effectives, une seule ou aucune, dans l'angle même qui contient le point donné, suivant la grandeur de cet angle, la situation du point donné par rapport à ses côtés et la longueur donnée.

Ainsi, en résumé, le problème ne saurait jamais avoir ni plus de quatre ni moins de deux solutions effectives; c'est-à-dire, qu'il doit conduire à une équation du quatrième degré, ayant nécessairement deux de ses racines réelles, tandis que les deux autres pourront être indistinctement réelles et inégales, égales ou imaginaires, suivant le rapport de grandeur des données.

Les quatre solutions sont représentées dans la figure 4, où AB, A'B', A''B'', A'''B''' sont les parties interceptées.

Solution. Soit pris l'angle qui contient le point donné pour angle

des coordonnées positives, désignons-le par γ, et soient a, b les coordonnées du point donné. Une droite quelconque passant par ce point aura une équation de la forme

$$y-b=M(x-a)\ ;$$

et la question se trouvera réduite à assigner la valeur de M qui rend égale à c la partie interceptée entre les axes des coordonnées.

Si, faisant successivement y et x égaux à zéro, dans cette équation, on la résout ensuite par rapport à x et y, respectivement, on en tirera

$$x=-\frac{b-Ma}{M}\ , \qquad y=b-Ma\ ;$$

ce sont donc là les segmens interceptés par notre droite sur les deux axes, à partir de l'origine ; ou, en d'autres termes, ce sont deux des côtés d'un triangle dont le troisième doit être c et dont l'angle opposé doit être γ ; ce qui donne

$$c^2=\left(\frac{b-Ma}{M}\right)^2+2\frac{b-Ma}{M}(b-Ma)\text{Cos.}\gamma+(b-Ma)^2\ ;$$

c'est-à-dire, en simplifiant,

$$M^2c^2=(b-Ma)^2(1+2M\text{Cos.}\gamma+M^2)\ ;$$

ou, en développant et ordonnant,

$$a^2M^4-2a(b-a\text{Cos.}\gamma)M^3+(a^2+b^2-c^2-4ab\text{Cos.}\gamma)M^2-2b(a-b\text{Cos.}\gamma)M+b^2=0.\quad(1)$$

Telle est donc l'équation qui résout le problème.

Lorsqu'on a ainsi obtenu une équation renfermant une inconnue quelconque, rien n'est plus aisé que d'assigner l'équation qui résulterait du choix de toute autre inconnue ; il suffit pour cela de

chercher une relation entre l'inconnue primitive et celle qu'on a dessein de lui substituer, et de se servir de cette relation pour éliminer la première des deux inconnues de l'équation déjà obtenue.

Supposons, par exemple, qu'à l'inconnue M on veuille substituer le segment intercepté par la droite cherchée, à partir de l'origine, soit sur l'axe des x, soit sur celui des y; en représentant respectivement ces deux segmens par x et par y, nous aurons, comme ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{b-Ma}{M}, \\ y&=\ b-Ma\ ; \end{aligned}\right\}\quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} M&=-\frac{b}{x-a}, \\ M&=-\frac{y-b}{a}\ ; \end{aligned}\right.$$

substituant successivement ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} &(x-a)^4+2(a-b\text{Cos.}\gamma)(x-a)^3+(a^2+b^2-c^2-4ab\text{Cos.}\gamma)(x-a)^2 \\ &\qquad +2ab(b-a\text{Cos.}\gamma)(x-a)+a^2b^2=0, \\ &(y-b)^3+2(b-a\text{Cos.}\gamma)(y-b)^3+(a^2+b^2-c^2-4ab\text{Cos.}\gamma)(y-b)^2 \\ &\qquad +2ab(a-b\text{Cos.}\gamma)(y-b)+a^2b^2=0\ ; \end{aligned}\right\}\ (2)$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} &x^4-2(a+b\text{Cos.}\gamma)x^3+(a^2+b^2-c^2+2ab\text{Cos.}\gamma)x^2+2ac^2x-a^2c^2=0, \\ &y^4-2(b+a\text{Cos.}\gamma)y^3+(a^2+b^2-c^2+2ab\text{Cos}\,\gamma)x^2+2bc^2x-b^2c^2=0. \end{aligned}\right\}\ (3)$$

On se comporterait de la même manière à l'égard de toute autre inconnue qu'on voudrait choisir.

L'équation (1) n'est point, en général, susceptible d'abaissement, et ne peut conséquemment fournir une construction graphique rigoureuse, exécutée avec la règle et le compas seulement; mais si la relation entre les données était telle que le problème n'eût

que trois solutions, ou, ce qui revient au même, que cette équation eût deux racines égales, le problème pourrait fort bien se résoudre alors géométriquement. En effet, la dérivée de cette équation qui est

$$2a^2M^3-3a(b-a\text{Cos.}\gamma)M^2+(a^2+b^2-c^2-4ab\text{Cos.}\gamma)M-b(a-b)\text{Cos.}\gamma)=0,$$

devrait avoir lieu en même temps qu'elle. Eliminant donc M entre l'une et l'autre, l'équation résultante en a, b, c, Cos.γ exprimerait la relation, entre les données, qui convient à ce cas. De plus, on obtiendrait, chemin faisant, une équation en M du premier degré, ou tout au plus du second, dont la résolution conduirait à celle du problème proposé.

Si l'on suppose que les droites données sont perpendiculaires entre elles, on aura Cos.$\gamma=0$, et l'équation (1) deviendra

$$a^2M^4-2abM^3+(a^2+b^2-c^2)M^2-2abM+b^2=0\;;$$

les équations (2) deviendront, dans le même cas,

$$(x-a)^4+2a(x-a)^3+(a^2+b^2-c^2)(x-a)^2+2ab^2(x-a)+a^2b^2=0\;;$$

$$(y-b)^4+2b(y-b)^3+(a^2+b^2-c^2)(y-b)^2+2a^2b(y-b)+a^2b^2=0\;;$$

ou bien

$$x^4-2ax^3+(a^2+b^2-c^2)x^2+2ac^2x-a^2c^2=0\;,$$

$$y^4-2by^3+(a^2+b^2-c^2)y^2+2bc^2y-b^2c^2=0\;;$$

et il n'en résultera aucune simplification notable dans la solution du problème.

Il n'en sera pas de même, si l'on suppose que le point donné est situé sur la droite qui divise en deux parties égales l'angle dans lequel il se trouve situé; on aura alors, en effet, $b=a$, et l'équation (1) deviendra

$$a^2M^4-2a^2(1-\text{Cos.}\gamma)M^3+[4a^2(1-\text{Cos.}\gamma)$$

$$-(2a^2+c^2)]M^2-2a^2(1-\text{Cos.}\gamma)M+a^2=0\ ,$$

équation réciproque qui conséquemment ne présente que la difficulté du second degré.

Rien n'est plus aisé que de se rendre compte de cette circonstance, et elle pouvait même être facilement prévue à l'avance. M est, en général, le rapport des sinus des angles que fait la droite cherchée avec les axes des x et des y; or, dans le cas particulier dont il s'agit ici, tout doit être symétrique par rapport à une droite indéfinie passant par l'origine et par le point donné; d'où il suit que, si l'on plie la figure suivant cette droite, deux des droites qui résolvent le problème viendront se confondre avec les deux autres, tandis que les axes des x et des y coïncideront. Les angles formés par l'une de ces droites avec les axes des x et des y sont donc respectivement égaux avec ceux que forme sa correspondante avec les axes des y et des x, d'où il suit qu'en changeant M en $\frac{1}{M}$ l'équation ne doit pas changer, et qu'ainsi elle doit être réciproque.

Les mêmes considérations prouvent que, dans ce cas, la plus courte ligne qu'on puisse mener par le point P, dans l'angle qui le contient est la perpendiculaire à celle qui joint ce point à l'origine; car, en pliant la figure comme il vient d'être dit, cette perpendiculaire se confondra avec elle-même. On voit par là que, dans le même cas, le problème aura quatre, trois ou deux solutions, suivant que la longueur donnée sera plus grande que cette perpendiculaire, égale à cette perpendiculaire ou moindre qu'elle.

Notre équation réciproque en M peut être écrite ainsi qu'il suit :

$$a^2M^4-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma.M^3+[8a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma-(2a^2+c^2)]M^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma.M+a^2=0\ ;$$

divisant tous ses termes par M^2, et rassemblant deux à deux ceux qui se trouvent à égale distance des extrêmes, il viendra

$$a^2\left(M^2+\frac{1}{M^2}\right)-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\left(M+\frac{1}{M}\right)+[8a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma-(2a^2+c^2)]=0;$$

ou encore

$$a^2\left(M+\frac{1}{M}\right)^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\left(M+\frac{1}{M}\right)+[8a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma-(4a^2+c^2)]=0;$$

posant donc

$$M+\frac{1}{M}=z, \qquad \text{d'où} \qquad M=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2},$$

cette équation deviendra

$$a^2z^2-4a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma.z+[8a^2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma-(4a^2+c^2)]=0;$$

et donnera

$$z=\frac{2a\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\pm\sqrt{c^2+4a^2\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}\gamma}}{a};$$

d'où

$$z^2=4.\frac{a\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\gamma+a\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}\gamma\pm\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{c^2+4a^2\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}\gamma}}{a},$$

et

$$z^2-4=-4\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma.\frac{a\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\mp\sqrt{c^2+4a^2\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}\gamma}}{a};$$

substituant donc dans la valeur de M, elle deviendra

$$M=\frac{a\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\pm\sqrt{c^2+4a^2\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}\gamma}\pm\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma.\sqrt{a^2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\gamma\mp a\sqrt{c^2+4a^2\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}\gamma}}}{a},$$

valeur que nous ne nous arrêterons pas à construire, attendu que

nous pouvons parvenir à quelque chose de beaucoup plus simple.

Parmi les divers préceptes qui ont été donnés sur le choix de l'inconnue, dans les problèmes de géométrie, il en est de très-vagues et d'un succès fort incertain ; mais il en est un aussi qui mérite une attention particulière, parce que son utilité est de toute évidence : c'est ce qui prescrit de *choisir de préférence pour inconnue, dans les problèmes susceptibles de plusieurs solutions, parmi toutes les quantités dont la détermination peut conduire à la résolution du problème, celle qui, dans les diverses solutions dont il est susceptible, subit le moindre nombre de variations.*

Ce principe offre ici une application toute naturelle. Que l'on conçoive, en effet, des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les quatre droites qui résolvent le problème, il est clair que lorsque, comme nous le supposons ici, la droite menée de cette origine au point donné divisera en deux parties égales l'angle dans lequel ce point se trouve situé, ces perpendiculaires seront égales deux à deux ; de telle sorte qu'en prenant l'une d'elles pour inconnue, le problème ne sera plus que du second degré (*). D'un autre côté, cette perpendiculaire une fois connue, rien ne sera plus facile que d'achever la construction du problème ; puisqu'il ne s'agira plus, pour cela, que de mener, par le point donné, des tangentes au cercle qui aurait l'origine pour centre et cette même perpendiculaire pour rayon.

Mais cherchons d'abord l'équation d'où dépend cette perpendiculaire, dans le cas le plus général, c'est-à-dire, dans le cas où elle est susceptible de quatre valeurs différentes.

Dans le cas des coordonnées obliques, en représentant par r la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite dont l'équation est

(*) Newton a bien aussi ramené le problème au second degré ; mais c'est d'une manière si détournée et si peu naturelle qu'aucun auteur d'élémens n'a cru devoir en faire mention.

$y-b$

$$y-b=M(x-a)\ ,$$

on aura

$$r=\frac{(b-Ma)\text{Sin}.\gamma}{\sqrt{1+2M\text{Cos}.\gamma+M^2}}\ ;$$

ou

$$(b-Ma)^2\text{Sin}.^2\gamma=r^2(1+2M\text{Cos}.\gamma+M^2)\ ;$$

il ne s'agira donc plus, pour avoir l'équation en r, que d'éliminer M entre cette équation et l'équation précédemment obtenue

$$c^2M^2=(b-Ma)^2(1+2M\text{Cos}.\gamma+M^2)\ .$$

En prenant successivement les racines quarrées de leur produit et du quotient de leur division, on parvient aux équations plus simples

$$cM\text{Sin}.\gamma=r(1+2M\text{Cos}.\gamma+M^2)\ ,$$

$$(b-aM)^2\text{Sin}.\gamma=crM\ ;$$

entre lesquelles l'élimination de M conduirait, en général, à une équation en r du quatrième degré.

Mais lorsque, comme nous le supposons ici, $b=a$ la dernière équation devient simplement

$$a^2(1-M)^2\text{Sin}.\gamma=crM\ ;$$

d'où

$$1-2M+M^2=\frac{crM}{a^2\text{Sin}.\gamma}\ ;$$

ou

$$1+M^2=\frac{cr+2a^2\text{Sin}.\gamma}{a^2\text{Sin}.\gamma}M\ ;$$

d'où

$$1+2M\text{Cos}.\gamma+M^2=\frac{cr+2a^2(\text{Sin}.\gamma+\text{Cos}.\gamma)}{a^2\text{Sin}.\gamma}M\ ;$$

substituant cette valeur dans l'autre équation, et divisant par M, il viendra enfin, en chassant le dénominateur, transposant, réduisant et ordonnant,

$$cr^2+2(\text{Sin.}\gamma+\text{Cos}\,\gamma)a^2r-ca^2\text{Sin.}^2\gamma=0\,;$$

équation qui n'est plus que du second degré seulement.

Si, sortant de ces généralités, nous prenons le problème tel que Newton se l'est proposé; c'est-à-dire, si nous supposons que les droites données se coupent perpendiculairement, nous aurons $\text{Sin.}\gamma=1$, $\text{Cos}\,\gamma=0$, et cette équation deviendra simplement

$$cr^2+2a^2r-ca^2=0\,,$$

d'où on tire

$$r=-\frac{a^2}{c}\pm\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{c}\,.$$

Rien n'est plus facile à construire que ces valeurs. Soient menées les deux coordonnées PG=PH=a du point P (fig. 5), de manière à former un quarré PO; soit portée la longueur donnée c sur OY, de O en D; soit menée DG, et par le point H la parallèle HK à cette droite, se terminant en K à OX; soit portée KH sur XX′ de K en M et de K en M′; décrivant alors du centre commun O et des rayons OM, OM′ deux cercles concentriques, ces cercles seront ceux dont les tangentes, par le point P, résoudront le problème, qui, conséquemment, dans le cas de la figure, n'aura que deux solutions, puisque le point P est intérieur à l'un des cercles.

On a, en effet,

$$\text{OM}=\ \text{OK}+\text{KM}=\ \text{OK}+\text{KH}=\ \text{OG}.\frac{\text{OH}}{\text{OD}}+\text{GD}.\frac{\text{OH}}{\text{OD}}\,,$$

$$\text{OM}'=-\text{OK}+\text{KM}=-\text{OK}+\text{KH}=-\text{OG}.\frac{\text{OH}}{\text{OD}}+\text{GD}.\frac{\text{OH}}{\text{OD}}\,;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$OM = \frac{a^2}{c} + \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{c},$$

$$OM' = -\frac{a^2}{c} + \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{c};$$

valeurs qui ne diffèrent de celles de r que par le signe de la dernière, qui n'est ici d'aucune considération.

On se convaincra facilement que le point P ne saurait, dans aucun cas, être intérieur au plus petit des deux cercles ni même au quarré circonscrit dont les côtés seraient parallèles aux deux droites données. Si ce point se trouvait sur la circonférence du grand, le problème n'admettrait que trois solutions.

On conviendra qu'il serait difficile de découvrir une construction géométrique du problème plus simple que celle que nous venons d'indiquer. Ce problème peut, au surplus, dans le cas même le plus général, être très-aisément construit par un procédé mécanique; il ne s'agit, en effet, pour cela, que de marquer sur l'arète d'une règle deux points dont la distance soit égale à la longueur donnée; de promener cette règle sur le plan des droites données, de manière que les deux points marqués sur son arète soient invariablement sur ces deux droites. En l'arrêtant dans les deux, trois ou quatre positions où elle passe par le point P et menant des droites, ces droites seront les solutions du problème (*).

Ceci peut fournir, au surplus, une manière assez commode de construire les racines d'une équation du quatrième degré qui n'en a que deux imaginaires au plus. Reprenons en effet l'équation dont les racines sont les quatre segmens que les droites cherchées dé-

(*) En d'autres termes, le problème revient à mener, par un point extérieur, une tangente à la courbe dont il a été question à la page 118 du précédent volume.

terminent sur l'axe des x, pour le cas où l'angle est droit et le point donné quelconque ; cette équation est

$$x^4-2ax^3+(a^2+b^2-c^2)x^2+2ac^2x-a^2c^2=0 \ .$$

Si l'on fait disparaître son second terme, en posant $x=z+\frac{1}{2}a$, elle deviendra

$$z^4-\{(c^2-b^2)+\tfrac{1}{2}a^2\}z^2+a(c^2+b^2)l+\tfrac{1}{4}a^2\{(c^2-b^2)-\tfrac{1}{2}a\}=0 \ .$$

Supposons donc qu'on ait à construire l'équation, sans second terme,

$$z^4+pz^2+qz+r=0 \ ,$$

on supposera qu'elle est la même que celle ci-dessus, ce qui donnera

$$(c^2-b^2)+\tfrac{1}{2}a^2+p=0 \ , \qquad a(c^2+b^2)-q=0 \ ,$$

$$\tfrac{1}{4}a^2\{(c^2-b^2)-\tfrac{1}{4}a^2\}-r=0 \ ;$$

d'où on tirera facilement

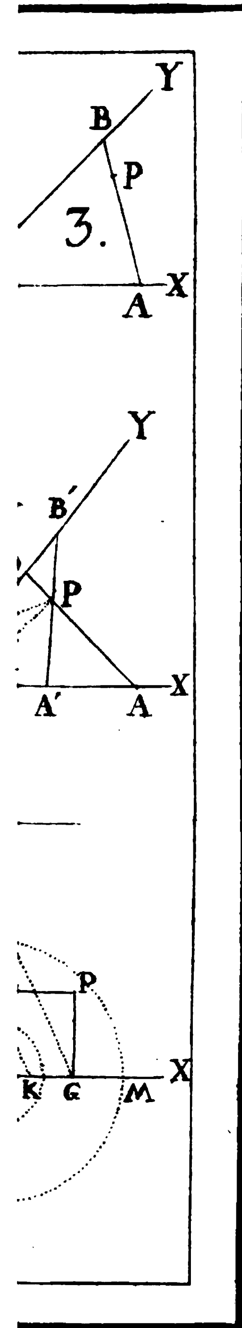
$$a=\tfrac{1}{3}\sqrt{-6(p\mp\sqrt{p^2-12r})} \ ,$$

$$b=\tfrac{1}{4a}\sqrt{2(4qa-a^4-16r)} \ ,$$

$$c=\tfrac{1}{4a}\sqrt{2(4qa+a^4+16r)} \ .$$

Traçant donc deux droites indéfinies, perpendiculaires l'une à l'autre, considérées comme axes des coordonnées ; prenant dans l'angle des coordonnées positives un point P, dont les coordonnées soient les valeurs de a, b, prises sur une échelle de parties égales ; résolvant mécaniquement notre problème pour ces droites et ce point et pour la longueur c, prise sur la même échelle ; les segmens déterminés sur l'axe des x, à partir de l'origine, pris avec leurs signes, réduits en nombres, au moyen de l'échelle, et diminués de $\frac{1}{2}a$ seront les valeurs de z.

I, pag. 189-217.



J. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherche de diverses séries;

Par M. Frédéric Sarrus, professeur de mathématiques au collége de Pezenas;

1. En multipliant membre à membre les formules connues

$$\text{Cos.}^2z=\text{Cos.}^2z-\text{Sin.}^2z\,,\qquad 1=\text{Cos.}^2z+\text{Sin.}^2z\,,$$

on trouve

$$\text{Cos.}2z=\text{Cos.}^4z-\text{Sin.}^4z=\text{Cos.}^4z(1-\text{Tang.}^4z)\,; \qquad (1)$$

de laquelle on déduira

$$\text{Log.Cos.}2z=\text{Log.Cos.}^4z+\text{Log.}(1-\text{Tang.}^4z)\,;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Log.Cos.}2z=4\text{Log.Cos.}z-M(\text{Tang.}^4z+\tfrac{1}{2}\text{Tang.}^8z+\tfrac{1}{3}\text{Tang.}^{12}z+\ldots)\,;$$

ou bien encore, en considérant $1-\text{Tang.}^4z$ sous la forme $\frac{1-\text{Tang.}^4z}{1}$;

$$\text{Log.Cos.}2z=4\text{Log.Cos.}z-2M\left\{\frac{\text{Tang.}^4z}{2-\text{Tang.}^4z}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\text{Tang.}^4z}{2-\text{Tang.}^4z}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{\text{Tang.}^4z}{2-\text{Tang.}^4z}\right)^5+\ldots\ldots\right\}\,;$$

formules dans lesquelles M est le module des tables, et qui sont très-convergentes, principalement la dernière, toutes les fois que l'angle z est moindre qu'un demi-droit.

II. Si, dans la formule (1), on change successivement z en $\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{4}z$, $\frac{1}{8}z$, ..., on trouvera

$$\text{Cos.}\ z=\text{Cos.}^4\tfrac{1}{2}z(1-\text{Tang.}^4\tfrac{1}{2}z)\ ,$$

$$\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}z=\text{Cos.}^4\tfrac{1}{4}z(1-\text{Tang.}^4\tfrac{1}{4}z)\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{4}z=\text{Cos.}^4\tfrac{1}{8}z(1-\text{Tang.}^5\tfrac{1}{4}z)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

En multipliant ces diverses équations membre à membre, on obtiendra, par la suppression des facteurs communs,

$$\text{Cos.}z=\text{Cos.}^3\tfrac{1}{2}z\text{Cos.}^3\tfrac{1}{4}z\text{Cos.}^3\tfrac{1}{8}z\ldots\ldots.$$

$$(1-\text{Tang.}^4\tfrac{1}{2}z)(1-\text{Tang.}^4\tfrac{1}{4}z)(1-\text{Tang.}^4\tfrac{1}{8}z)\ldots\ldots$$

d'où

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}z\text{Cos}\ \tfrac{1}{4}z\text{Cos}\ \tfrac{1}{8}z\ldots\ldots=\frac{\text{Cos.}^{\frac{1}{3}}z}{(1-\text{Tang.}^4\frac{1}{2}z)^{\frac{1}{3}}(1-\text{Tang.}^4\frac{1}{4}z)^{\frac{1}{3}}(1-\text{Tang.}^4\frac{1}{8}z)^{\frac{1}{3}}\ldots}$$

substituant cette valeur dans la formule connue

$$\text{Sin.}z=z\text{Cos.}\tfrac{1}{2}z\text{Cos.}\tfrac{1}{4}z\text{Cos.}\tfrac{1}{8}z\ldots\ldots;$$

on aura

$$\text{Sin.}z=\frac{z\text{Cos.}^{\frac{1}{3}}z}{(1-\text{Tang.}^4\frac{1}{2}z)^{\frac{1}{3}}(1-\text{Tang.}^4\frac{1}{4}z)^{\frac{1}{3}}(1-\text{Tang.}^4\frac{1}{8}z)^{\frac{1}{3}}\ldots}\ ;$$

série tout aussi régulière et beaucoup plus convergente.

III. Prenons encore les formules connues

$$\text{Cos.}z=\frac{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\text{Sin.}z=\frac{e^{z\sqrt{-1}}-e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

dans lesquelles on a, comme l'on sait

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots;$$

L'on en déduira

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\frac{\text{Cos.}z+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z}{\text{Cos.}z-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z}, \qquad (2)$$

auquel on peut substituer

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\frac{\text{Cos.}^2z+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z\text{Cos.}z}{\text{Cos.}^2z-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z\text{Cos.}z};$$

ou encore

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\frac{1-\text{Sin.}^2z+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z\text{Cos.}z}{1-\text{Sin.}^2z-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}z\text{Cos.}z};$$

ou enfin

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{Log.}\frac{1-\text{Sin.}z(\text{Sin.}z-\sqrt{-1}\,\text{Cos.}z)}{1-\text{Sin.}z(\text{Sin.}z+\sqrt{-1}\,\text{Cos.}z)},$$

et par conséquent

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{\text{Log.}[1-\text{Sin.}z(\text{Sin.}z-\sqrt{-1}\,\text{Cos.}z)]-\text{Log.}[1-\text{Sin.}z(\text{Sin.}z+\sqrt{-1}\,\text{Cos.}z)]\}. \quad (3)$$

Faisons présentement

$$\text{Tang.}z=x;$$

d'où

$$\text{Sin.}z=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad \text{Cos.}z=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,;$$

mettant ces valeurs dans l'équation (3), elle deviendra

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\text{Log.}\left[1-\frac{x}{1+x^2}(x-\sqrt{-1})\right]\right.$$

$$\left.-\text{Log.}\left[1-\frac{x}{1+x^2}(x+\sqrt{-1})\right]\right\}.$$

En développant le second membre de cette équation en deux séries et réunissant les termes correspondans, on tombe précisément sur la formule donnée par M. Kramp, à la page 29 de ce volume, et qui se trouve ainsi établie sans induction.

Désignons l'angle droit par q, et faisons, dans l'équation (3) $z=q-u$, nous trouverons

$$q-u=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{\text{Log.}[1-\text{Cos.}u(\text{Cos.}u-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}u)]-\text{Log.}[1-\text{Cos.}u(\text{Cos.}u+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}u)]\};$$

développant le second membre, et observant que

$$\frac{(\text{Cos.}u+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}u)^n-(\text{Cos.}u-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}u)^n}{2\sqrt{-1}}=\text{Sin.}nu\,,$$

nous aurons, en changeant u en z,

$$q-z=\frac{\text{Cos.}z}{1}\text{Sin.}z+\frac{\text{Cos.}^2z}{2}\text{Sin.}2z+\frac{\text{Cos.}^3z}{3}\text{Sin.}3z+\ldots\ldots$$

série très-régulière.

IV. En intégrant par parties, on trouve

$$\int\frac{x^m dx}{(1+x^2)^n}=\frac{x^{m+1}}{m(1+x^2)^n}+\frac{2n}{m}\int\frac{x^{m+2}dx}{(1+x^2)^{n+1}}\,; \qquad (4)$$

et comme, lorsque x désigne la tangente de l'angle z, on a

$$dz=\frac{dx}{1+x^2},$$

on conclut de cette formule

$$z=\frac{1}{x}\left\{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4+\ldots\right\},$$

dont les termes sont tous positifs.

On a encore

$$\frac{1}{1+x^2}=1-\frac{x^2}{1+x^2};$$

d'où l'on tire

$$z=x-\int\frac{x^2dx}{1+x^2};$$

ce qui donne, en vertu de la formule (4),

$$z=x-\frac{x}{3}\left\{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2.4}{5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.4.6}{5.7.9}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4+\ldots\right\}.$$

La valeur de z, déduite de la formule précédente, était constamment trop petite; celle qu'on déduira de celle-ci sera constamment trop grande; de sorte que, par leur emploi simultané, on obtiendra une limite de l'erreur résultant de l'usage de chacune d'elles; condition que l'on doit toujours s'imposer dans tout procédé approximatif. Ces formules sont précisément celles qu'on a proposé de démontrer à la page 188 de ce volume.

On tire de notre dernière série

$$\frac{z}{x}=1-\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2.4}{5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\ldots\right\};$$

en supposant $z=q$, on aura $x=\infty$, $\frac{z}{x}=0$ et $\frac{x^2}{1+x^2}=1$; substituant donc, il viendra, en transposant,

$$1=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}+\frac{2\cdot4}{5\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6}{5\cdot7\cdot9}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{5\cdot7\cdot9\cdot11}+\ldots\ldots\right);$$

multipliant celle-ci par 3, transposant et réduisant, nous aurons

$$2=\frac{2}{5}+\frac{2\cdot4}{5\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6}{5\cdot7\cdot9}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{5\cdot7\cdot9\cdot11}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}{5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13}+\ldots\ldots$$

multipliant cette dernière par $\frac{5}{2}$, transposant et réduisant, on aura

$$4=\frac{4}{7}+\frac{4\cdot6}{7\cdot9}+\frac{4\cdot6\cdot8}{7\cdot9\cdot11}+\frac{4\cdot6\cdot8\cdot10}{7\cdot9\cdot11\cdot13}+\ldots\ldots$$

Un procédé semblable pouvant être répété indéfiniment, on aura, en général,

$$2n=\frac{2n}{2n+3}+\frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2n+2}{2n+5}+\frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2n+2}{2n+5}\cdot\frac{2n+4}{2n+7}+\ldots.$$

résultat remarquable, qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *à priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs (*).

V. Soit représenté, en général, par (i,n) une fonction telle que

$$\frac{i}{1}\cdot\frac{i-1}{2}\cdot\frac{i-2}{3}\ldots\ldots\ldots\frac{i-n}{1+n};$$

on aura

$$(i,k+1)=(i,k)\cdot\frac{i-(k+1)}{k+2};$$

d'où on tire, par intégration,

(*) Il serait curieux de savoir si cette formule aurait également lieu pour une valeur fractionnaire ou négative de n.

J. D. G.

$$\int(i,\, k+1)\mathrm{d}i = -\frac{k+1}{k+2}\int(i,\, k)\mathrm{d}i + \frac{1}{k+2}\int(i,\, k)i\mathrm{d}i\,;$$

en posant donc, pour abréger,

$$\frac{\int(i,\, k)i\mathrm{d}i}{\int(i,\, k)\mathrm{d}x} = u\,,$$

cette équation deviendra

$$\int(i,k+1)\mathrm{d}i = -\int(i,k)\mathrm{d}i \times \frac{k+1-u}{k+2}\,.$$

Si l'on prend les intégrales depuis $i=0$ jusqu'à $i=1$, la fonction u sera positive et moindre que l'unité; d'où l'on voit qu'entre ces limites $\int(i,\, k+1)\mathrm{d}i$ est moindre que $\int(i,k)\mathrm{d}i$, et de signe contraire. Il est même facile de s'assurer que, si l'on représente par $(-1)^k A_k$, l'intégrale $\int(i,k)\mathrm{d}i$, prise entre ces limites, tous les nombres A_0, A_1, A_2, ... A_k seront positifs.

VI. Cela posé, si y représente une fonction déterminée de x, et qu'on désigne par y_i la valeur que prend y, lorsqu'on change x en $x+i$; l'on aura, comme l'on sait, en posant $\Delta x=1$

$$y_i = y + (i,\,0)\Delta y + (i,\,1)\Delta^2 y + (i,\,2)\Delta^3 y + \ldots\ldots;$$

multiplant par $\mathrm{d}i$, et intégrant entre les limites 0 et 1, on trouvera, en vertu de ce qui précède,

$$\Delta\int y\mathrm{d}x = y + A_0\Delta y - A_1\Delta^2 y + A_2\Delta^3 y - A_3\Delta^4 y + \ldots\ldots; \qquad (6)$$

en observant qu'entre ces limites $\int y_i\mathrm{d}i = \Delta\int y\mathrm{d}x$. Intégrant la formule (6) par rapport à Δ, on aura

$$\int y\mathrm{d}x = \Sigma y + A_0 y - A_1\Delta y + A_2\Delta^2 y - \ldots\ldots + Const.\,; \qquad (7)$$

d'où, en transposant et changeant de constante

$$\Sigma y = \int y \mathrm{d}x - A_0 y + A_1 \Delta y - A_2 \Delta^2 y + \ldots\ldots \qquad (8)$$

Cette dernière formule nous paraît de beaucoup préférable à la formule ordinaire ; attendu que les *nombres de Bernoulli* qu'on y introduit, deviennent bientôt excessivement divergens ; tandis qu'au contraire nos A_0, A_1, A_2, ... A_k, convergent constamment, comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

Pour donner une application de nos formules, soit

$$y = \frac{1}{x}, \qquad \text{d'où} \qquad \int y \mathrm{d}x = \mathrm{l}x$$

$$\Delta y = -\frac{1}{x(x+1)}, \quad \Delta^2 y = +\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)}, \ldots\ldots,$$

$$\Delta^k y = [-1]^k . \frac{1.2.3\ldots\ldots.k}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots.(x+k)};$$

alors la formule (6) donnera

$$\Delta \mathrm{l}x = \frac{1}{x} - \frac{1.A_0}{x(x+1)} - \frac{1.2.A_1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1.2.3.A_2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \ldots\ldots$$

d'où on conclura

$$\Delta^2 \mathrm{l}x = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1.2.A_0}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1.2.3.A_1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \ldots\ldots$$

et, en général,

$$\Delta^k \mathrm{l}x = (-1)^{k+1} . \frac{x!}{x} \left\{ \frac{k!}{(x+k)!} - \frac{(k+1)!}{(x+k+1)!} A_0 + \frac{(k+2)!}{(x+k+2)!} A_1 - \frac{(k+3)!}{(x+k+3)} A_2 + \ldots \right\}$$

Formule plus régulière, plus convergente et plus commode que toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici, pour le calcul des différences logarithmiques.

On

On pourrait faire une infinité d'applications des séries (6, 7, 8); mais, comme elles ne sauraient offrir de difficulté, nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous contenterons d'observer que la formule (6) est comprise, comme cas particulier, dans la suivante

$$\Delta^k \int y\mathrm{d}x = \Delta^{k-1}y + A_0\Delta^k y - A_1\Delta^{k+1}y + A_2\Delta^{k+2}y - \ldots\ldots$$

qui s'en déduit avec la plus grande facilité.

VIII. On peut employer aussi, dans un grand nombre de cas, la formule suivante

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \Delta y - \tfrac{1}{2}\Delta^2 y + \tfrac{1}{3}\Delta^3 y - \tfrac{1}{4}\Delta^4 y + \ldots\ldots$$

d'où on conclut

$$\Sigma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \tfrac{1}{2}\Delta y + \tfrac{1}{3}\Delta^2 y - \tfrac{1}{4}\Delta^3 y + \ldots\ldots + Const.$$

nous nous contenterons d'en faire les deux applications suivantes.

Soit $y = \frac{1}{x}$, d'où $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}$; on aura

$$\Sigma\frac{1}{x^2} = \text{Const.} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)} - \ldots.$$

série tout à la fois régulière et convergente.

Soit encore $y = \int(i, n)\mathrm{d}i$, l'on aura $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i} = (i, n)$, $\Sigma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i} = (i, n+1) + C$,

et $\Delta^k y = \Delta^k \int(i, n)\mathrm{d}i = \int \mathrm{d}i\Delta^k(i, n)$; partant, en observant que

$$\Delta^k(i, n) = (i, n-k)\,,\quad \Delta^{n+1}(i, n) = 1\,,\quad \Delta^{n+1+m}(i, n) = 0\,,$$

nous aurons

$$(i\,,n+1)=\int(i\,,n)\mathrm{d}i-\tfrac{1}{2}\int(i\,,n-1)\mathrm{d}i+\tfrac{1}{3}\int(i\,,n-2)\mathrm{d}i-\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\int(i\,,o)\mathrm{d}i+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\,i.$$

Si, dans cette dernière formule, on prend les intégrales depuis $i=0$ jusqu'à $i=1$, en mettant pour $\int(i\,,n)\mathrm{d}i$, $\int(i\,,n-1)\mathrm{d}i$, ... prises entre ces limites, les nombres qui les représentent et que nous avons appelés $(-n)^n A_n$, $(-1)^{n-1}A_{n-1}$, ... on trouvera

$$0=A_n+\frac{1}{2}A_{n-1}+\frac{1}{3}A_{n-2}+\ldots\ldots+\frac{1}{o+1}A_o-\frac{1}{n+2}\;.$$

On tire de là

$$A_n=\frac{1}{n+2}-\left(\frac{A_{n-1}}{1}+\frac{A_{n-2}}{3}+\frac{A_{n-3}}{4}+\frac{A_{n-4}}{5}+\ldots\ldots\frac{A_0}{n+1}\right);$$

ou encore, en observant que $A_0=\frac{1}{2}$,

$$A_n=\frac{n}{2(n+1)(n+2)}-\left(\frac{A_{n-1}}{2}+\frac{A_{n-2}}{3}+\frac{A_{n-3}}{4}+\frac{A_{n-4}}{5}+\ldots\ldots+\frac{A_1}{n}\right);$$

formule qui servira à déduire les uns des autres les nombres A_1, A_2, A_3, ... A_n que nous avons substitués, dans nos formules, aux nombres de Bernoulli. En observant que $A_1=\frac{1}{12}$, on trouvera

$$A_0=\frac{1}{2}=0{,}50000000\;,$$

$$A_1=\frac{1}{12}=0{,}08333333\;,$$

$$A_2=\frac{1}{24}=0{,}04166666\;,$$

$$A_3 = \frac{19}{720} = 0,02638888\,,$$

$$A_4 = \frac{3}{160} = 0,01875000\,,$$

$$A_5 = \frac{863}{60480} = 0,01426918\,,$$

. . . .

Or, ces nombres étant tous positifs, ainsi que nous l'avons déjà observé, et étant en outre perpétuellement convergens, il s'ensuit que

$$A_n < \frac{n}{2(n+1)(n+2)} - A_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

d'où on tire

$$A_n < \frac{n}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}}\,;$$

ce qui montre, mieux que nous ne l'avions fait ci-dessus, la convergence toujours croissante de ces nombres.

OPTIQUE.

Sur le nombre et la nature des couleurs primitives;

Par un Abonné.

Jusqu'a l'époque où Newton parut, nous n'avions guère sur la nature des couleurs que des idées vagues, incertaines et tout-à-fait indignes d'une saine philosophie ; et on a même quelque sujet de s'étonner qu'avec un tel système d'idées on ait pu pénétrer aussi avant qu'on l'avait déjà fait à cette époque dans le mécanisme du phénomène de l'arc-en-ciel.

Le philosophe anglais, armé du prisme, nous apprit enfin à interroger la nature par des expériences bien conduites, et à substituer ses réponses aux rêves de notre imagination ; il nous montra le premier, par des faits incontestables, que la lumière blanche, qui émane soit du soleil, soit de tout autre corps lumineux, soit enfin d'un corps simplement éclairé n'est point une substance simple, mais qu'elle résulte du mélange ou de la combinaison de diverses autres substances jouissant de différens degrés de réfrangibilité.

J'ai dit du mélange ou de la *combinaison* ; car il faut avouer qu'ici les propriétés du composé diffèrent d'une manière trop marquée de celles de ses divers composans, pour qu'on se résigne volontiers à voir dans le phénomène quelque chose de moins qu'une véritable combinaison, analogue aux combinaisons chimiques. Du moins est-il vrai qu'il faut avoir une foi un peu robuste pour voir,

soit dans la rotation rapide d'un carton chargé des couleurs du prisme, soit dans les mélanges de poudres ou d'encres colorées, soit dans tout autre moyen grossiers, employés par nos professeurs de physique dans leurs cours, pour la recomposition de la lumière blanche, autre chose que la production d'un gris fort sale. Il n'y a que la concentration du spectre au foyer d'une lentille qui produise véritablement du blanc.

Il n'eût donc pas été aussi facile de deviner, *à priori*, ce résultat particulier des expériences de Newton qu'il l'avait été de découvrir que le noir est la privation ou l'absence de toute lumière et conséquemment de toute couleur. Mais, ce qu'on n'aurait pas deviné davantage, c'est qu'il y eût d'autres couleurs primitives que le *rouge*, le *jaune* et le *bleu*; car les peintres savaient très-bien, depuis long temps, qu'en joignant seulement à ces trois couleurs le *noir* et le *blanc*, on pouvait, par leur seul mélange, produire toutes les nuances imaginables, et qu'en particulier on formait l'*oranger*, le *vert* et le *violet*, en mêlant deux à deux les trois couleurs de la première sorte; tandis qu'au contraire il est absolument impossible de produire aucune de celles-ci par le mélange de telles des autres qu'on voudra.

Il paraît que Newton lui-même ne fut pas peu surpris des résultats auxquels il parvint; et l'on en peut juger par la multitude des expériences qu'il tenta, dans la vue sans doute de confirmer ou de détruire les conséquences paradoxales que ces résultats paraissaient entraîner.

Une expérience constante nous a appris, en effet, que toutes les fois que nous sommes assez heureux pour arracher à la nature quelqu'un de ses nombreux secrets, nous la voyons toujours parvenir à son but par les voies les plus simples; d'où nous sommes fondés à croire que, lorsque nous lui supposons quelque mode d'action tant soit peu compliqué, c'est que nous ne l'avons pas encore devinée. Comment donc serait-elle ici au-dessous de l'art même le plus grossier?

Je sais bien qu'on m'objectera que l'*oranger*, le *vert* et le *violet* que nous formons par le mélange de deux des trois couleurs *bleue rouge* et *jaune*, ne ressemble pas parfaitement aux couleurs de même nom que présente le spectre; mais je demanderai à mon tour si notre *bleu*, notre *rouge* ou notre *jaune* ressemblent davantage à celui qu'on obtient par le prisme? et s'il est bien surprenant que l'art ne parvienne à imiter la nature que d'une manière imparfaite? Que si l'on insiste, et si l'on dit que, par exemple, le *vert* formé par le mélange du *bleu* et du *jaune* du spectre ne ressemble pas non plus parfaitement au *vert* immédiat de ce spectre; je demanderai si l'on est bien certain de connaître dans quelle proportion il faut mêler ces deux couleurs pour approcher du moins le plus près du but?

Il est d'ailleurs une multitude d'autres considérations qui tendent à faire envisager le *rouge*, le *jaune* et le *bleu* comme des couleurs essentiellement simples; et à faire regarder, au contraire, le *vert*, le *violet* et l'*oranger* comme autant de composés binaires (*). Que l'on propose, par exemple, à quelqu'un, de disposer, les uns à côté des autres, sur une surface plane, suivant l'analogie de leur couleur, trois rubans, le premier *rose*, le second *jaune-paille* et le troisième *bleu de ciel*; il se trouvera très-certainement embarrassé, et ne verra aucune raison de préférence dans le choix de celui de ces trois rubans qui doit occuper le milieu; parce qu'en effet le *jaune* n'est pas plus l'intermédiaire du *rouge* et du *bleu* que chacune de ces deux dernières couleurs n'est l'intermédiaire des deux

---

(*) Dans tout ceci, je fais abstraction de l'*indigo* qui doit être du *violet* s'il n'est pas du *bleu*, et qui pourrait bien n'avoir été introduit dans le spectre que pour porter le nombre des couleurs à *sept*; car il est bien difficile que l'homme ne se décèle pas par quelque endroit. Ainsi Huyghens, après la découverte du premier satellite de Saturne, négligea de chercher les autres; ne présumant pas que le nombre total de ces sortes d'astres pût excéder *sept*.

autres; attendu que chacune d'elles a un caractère qui lui est tout-à-fait propre. On ne pourrait donc arranger ces trois rubans d'une manière convenable que sur la surface d'un cylindre et parallèlement à son axe, en choisissant ce cylindre de manière que les rubans en occupassent l'entière largeur. Chaque couleur se trouverait alors en effet intermédiaire aux deux autres.

Mais supposons que, le cylindre étant d'un rayon assez grand pour que les trois rubans appliqués sur sa surface laissent entre eux des intervalles égaux à leur largeur commune, on propose de remplir ces intervalles par trois autres rubans, le premier *souci*, le second *vert-pomme* et le troisiéme *lilas*, de manière que les nuances se succèdent de la manière la plus uniforme. Celui à qui on fera cette proposition ne sera-t-il pas conduit, tout naturellement, à placer le ruban *souci* entre le ruban *rouge* et le ruban *jaune*; le ruban *vert* entre ce dernier et le ruban *bleu*; et enfin le ruban *lilas* entre le ruban *bleu* et le ruban *rose* (*).

(*) Je suppose, et je dois supposer dans tout ceci, que celui que l'on charge de cet arrangement a le sens de la vue parfaitement organisé. On a rencontré, en effet, des individus qui, par suite de quelque vice de l'organe, ne distinguaient dans les couleurs que du *clair* et du *foncé*; et qui ne concevaient pas, par exemple, qu'il pût être plus facile d'apercevoir des cérises sur un cérisier que des olives sur un olivier. Il est évident que des êtres ainsi organisés ne conviendraient aucunement pour l'expérience que je propose. On rencontre aussi des gens qui ne distinguent dans les sons que le *fort* et le *faible*; et l'on conçoit que ceux-ci seraient également impropres à disposer des vases sonores, les uns à la suite des autres, dans l'ordre des sons qu'ils rendent, du *grave* à *l'aigu*.

On pourrait facilement, d'après ce que je viens de dire, disposer systématiquement, sur la surface d'un cylindre, toutes les couleurs et toutes les nuances de couleurs simples et binaires. Supposons, par exemple, que le cylindre soit divisé longitudinalement, par des parallèles, en 36 bandes égales. On appliquerait sur l'une d'elles 12 parties de *rouge pur*, sur la suivante 11 parties de rouge mêlées avec une de jaune; sur la troisième 10 parties de rouge

On donne communément comme caractère distinctif des idées simples qu'on ne peut les acquérir, lorsque ce sont des idées sensibles, que par la sensation même; et qu'elles sont absolument incommunicables par le secours des mots; tandis qu'au contraire l'imagination, en combinant à son gré des idées simples, peut former une multitude d'idées complexes, n'ayant aucun modèle extérieur, lesquelles pourront être communiquées par le discours à tous ceux à qui les idées simples dont elles seront l'assemblage seront familières. Or, s'il en est ainsi, comme on ne saurait guère en douter, il faut dès-lors convenir que les idées du *rouge*, du *jaune* et du *bleu* ont tous les caractères des idées simples, tandis qu'au contraire celles de l'*oranger*, du *vert* et du *violet* semblent incontestablement être complexes; d'où il paraît naturel d'inférer que les couleurs de la première série sont des couleurs simples, tandis qu'au contraire celles de la seconde sont des couleurs binaires.

Supposons, en effet, qu'il n'y ait, dans la nature, que du *rouge* et du *jaune* et toutes les nuances qui peuvent résulter du mélange de ces deux couleurs, dans diverses proportions; on ne conçoit pas mieux comment, dans cet état de choses, nous pourrions nous former l'idée du *bleu*, que l'on ne conçoit comment

---

et deux de jaune, et ainsi de suite, jusqu'à la septième qui, étant couverte de parties égales de rouge et de jaune, offrirait l'*oranger pur*. La huitième offrirait un mélange de 5 parties de rouge et 7 de jaune, et l'on arriverait ainsi, par des nuances presque insensibles, à la treizième, qui offrirait le *jaune pur*. On passerait, par de semblables degrés, du *jaune* au *vert*, du *vert* au *bleu*, du *bleu* au *violet*, et enfin du *violet* au *rouge*.

On pourrait d'ailleurs, en supposant originairement le cylindre blanc, affaiblir graduellement les teintes des différentes bandes depuis son milieu jusqu'à l'une de ses extrémités, où se trouverait ainsi une zône entièrement *blanche*; et, à partir du même milieu, appliquer sur l'autre moitié de ces bandes du noir de plus en plus intense, de telle sorte qu'à l'autre extrémité, le noir ne aissât plus percer la couleur sur laquelle on l'aurait appliqué. Le cylindre se trouverait ainsi terminé, à cette extrémité, par une zône entièrement *noire*.

nous-mêmes,

nous-mêmes, dans l'ordre présent, nous pourrions imaginer une couleur primitive, essentiellement distincte de toutes celles que nous connaissons; et si, dans cette hypothèse, quelque habitant d'un autre univers, ayant éprouvé la sensation du *bleu*, tentait de nous communiquer l'idée qu'il en a, la chose lui serait tout-à-fait impossible. En un mot, nous serions exactement, par rapport au *bleu*, ce que sont les aveugles par rapport à toutes les couleurs; et ce que je dis ici du *bleu*, comparé au *rouge* et au *jaune*, on pourrait également le dire de chacune de ces deux couleurs comparées aux deux autres et à leurs divers mélanges.

Mais, si l'on suppose, au contraire, que quelqu'un n'a jamais vu que du *rouge*, du *jaune* et du *bleu* dans toute leur pureté, lui sera-t-il *impossible* de se former l'idée des diverses nuances de ces trois couleurs (*); et, en particulier, de l'*oranger*, du *vert* et du *violet*? Et sera-t-il du moins impossible à celui qui connaîtra les couleurs de cette dernière série, de lui en faire naître l'idée? je ne le pense pas. Ne pourra-t-il pas lui dire, en effet, que l'*oranger* est un *rouge* tirant sur le *jaune*, ou un *jaune* tirant sur le *rouge*; que le *vert* est un *jaune* tirant sur le *bleu* ou un *bleu* tirant sur le *jaune*; et qu'enfin le *violet* est un *bleu* tirant sur le *rouge* ou un *rouge* tirant sur le *bleu*? A ne considérer donc que des raisons de pure convenance; et en supposant qu'aucun fait connu n'y fasse obstacle, tout semblerait concourir à faire regarder le *rouge*, le *jaune* et le *bleu* comme des couleurs simples, et à faire admettre au contraire l'*oranger*, le *vert* et le *violet* comme des couleurs essentiellement composées.

(*) Je prie le lecteur de remarquer que je dis *impossible* et non pas *difficile*. Je sais trop bien, en effet, que de tous les moyens d'acquérir des idées sensibles, la sensation est de beaucoup le plus efficace; et c'est là ce qui établit la supériorité de la langue du dessin sur la langue articulée, lorsqu'il s'agit de description.

Mais que peuvent, me dira-t-on, toutes ces idées de convenance contre des expériences décisives; contre des faits avérés qu'aujourd'hui personne n'oserait sérieusement contester? N'est-ce pas seulement depuis que la philosophie naturelle a cessé d'être purement spéculative et conjecturale, et qu'elle a pris l'expérience pour base, qu'elle a fait de véritables progrès ou, pour mieux dire, qu'elle est devenue une véritable science? et, si les anciens nous ont légué en physique une si grande multitude d'erreurs, n'est-ce pas précisément parce qu'au lieu d'observer la nature, parce qu'au lieu de lui arracher ses secrets par la voie de l'expérience, ils ont mieux aimé chercher à la deviner? Or, ne sait-on pas qu'en faisant passer un quelconque des rayons du spectre à travers un second prisme, il ne subit aucune décomposition, et en faut-il davantage pour se convaincre que chacun de ces rayons est bien réellement indécomposable?

Certes, il est bien loin de ma pensée de chercher à établir une doctrine que des expériences bien décisives tendraient à repousser; mais celles qu'on m'oppose ici sont-elles de nature à ne laisser le moindre accès à un doute raisonnable? je ne le pense pas. Et j'observe d'abord que les expériences dont il s'agit ici sont extrêmement délicates et difficiles à exécuter; qu'elles ne peuvent guère être faites d'une manière convenable qu'à l'aide de l'Héliostat, c'est-à dire, d'un instrument qui n'est entre les mains que d'un très-petit nombre de physiciens. Je crois très-fermement au théorème de Pythagore sur le triangle rectangle, parce que des milliers de géomètres, qui en ont examiné plus d'une fois la démonstration, l'ont constamment trouvée exacte; parce que moi-même je l'ai répété peut être cent fois et varié d'un grand nombre de manières, sans jamais trouver le raisonnement en défaut; parce qu'enfin je puis la répéter encore tout aussi souvent qu'il me plaira; mais les expériences de Newton sur les couleurs m'offrent-elles une aussi solide garantie? c'est ce dont le lecteur pourra juger, par les détails dans lesquels je vais entrer.

J'observe d'abord que, selon Newton et tous les physiciens

qui ont suivi sa doctrine, le spectre ne présente pas proprement *sept* couleurs; mais bien *une infinité* de couleurs différemment réfrangibles et parmi lesquelles on remarque seulement *sept* nuances principales. Quelques précautions donc que l'on prenne pour isoler le plus possible ces nuances les unes des autres, toujours le rayon que l'on fera passer à travers un second prisme sera un rayon plus ou moins composé, qui conséquemment devra subir quelque dilatation, dans le sens perpendiculaire à la longueur de ce prisme, contrairement à ce qu'avancent la plupart des physiciens.

Mais puisqu'enfin ces expériences ne sont pas à la portée de tout le monde; examinons en détail par qui elles ont été faites, et avec quel genre de succès.

Je rencontre d'abord *Mariotte*, expérimentateur très-habile, qui manqua totalement ces expériences, et qui établit, d'après les résultats qu'il en obtint, une théorie toute différente de celle de Newton (*Éloges des académiciens*, par Condorcet, tom. I, pag. 85).

Smith dit bien qu'un rayon homogène présenté à un second prisme s'y réfracte d'une manière uniforme, sans se dilater plus dans un sens que dans l'autre (du moins autant que l'œil en peut juger); mais il n'explique pas s'il a répété l'expérience sur chacun des rayons en particulier (*Cours complet d'optique*, traduction de Pezenas, tom. I, pag. 194).

'SGravesande convient que l'expérience est très-difficile, et qu'il n'est pas surprenant que Mariotte l'ait manquée; et il donne ses conjectures sur les causes qui peuvent souvent l'empêcher de réussir (*Élémens de physique*, traduction de Joncourt, tom. II, pag. 293).

Musschenbroek dit seulement que, plus un rayon aura été rompu par le prisme, plus aussi il le sera par le second; ce que personne n'a jamais songé à contester (*Essai de physique*, traduction de Massuet, tom. II, pag. 538).

Nollet dit bien qu'aucun des sept rayons du spectre ne se décomposera à travers un second prisme; mais c'est le rayon *rouge*

qu'il prescrit de choisir pour sujet des expériences; il insiste d'ailleurs avec force sur la difficulté de l'opération; mais il ajoute qu'un *esprit non prévenu* sera toujours disposé à rejeter sur la défectuosité des prismes ce qu'elle pourra offrir de douteux dans son résultat. Il nous paraît qu'*esprit docile* aurait été le mot. (*Leçons de physique expérimentale*, quatrième édition, tom. V, pag. 379 et suiv.)

Paulian dit à peu près la même chose, mais c'est toujours le rayon *rouge* qu'il prend pour sujet de ses expériences (*Dictionnaire de physique portatif*, édition de 1769, tom. I, pag. 215).

Para parle bien également du rayon *rouge* et du rayon *violet*, mais tout ce qu'il dit à ce sujet ne saurait être d'aucun poids, attendu que, loin qu'il paraisse avoir fait lui-même les expériences, il s'appuye uniquement de ce qu'elles ont réussi à *Newton* et à *Nollet* (*Théorie des êtres sensibles*, tom. III, pag. 126).

C'est encore le rayon *rouge* que *Sigaud-de-Lafont* prend pour sujet de ses expériences, et il ne dit pas même qu'il en doive autant arriver aux autres (*Élémens de physique*, tom. IV, pag. 236).

Brisson indique le rayon *rouge* et le rayon *violet* comme ceux sur lesquels l'épreuve doit le mieux réussir, attendu, dit-il qu'ils se trouvent aux deux extrémités du spectre; mais il se détermine finalement pour le premier (*Traité élémentaire de physique*, quatrième édition, tom. II, pag. 303).

Haüy mentionne l'expérience sans désignation de couleur; mais c'est toujours Newton qu'il prend pour garant, sans rien dire qui puisse faire croire qu'il a vérifié lui-même, avec tout le soin et toute la sévérité requise, les résultats obtenus par le philosophe anglais (*Traité élémentaire de physique*, deuxième édition, tom. II, pag. 210).

Libes n'a point mentionné l'expérience dont il s'agit (*Traité complet et élémentaire de physique*, deuxième édition, tom. III).

M. Beudan s'est fort peu étendu sur ce sujet dans son *Essai d'un cours élémentaire des sciences physiques*; et quant à M. *Biot*, il s'est constamment montré Newtonien trop prononcé pour

que ce qu'il avance à cet égard entraîne une conviction complète.

Il ne dit pas d'ailleurs, ni dans son grand traité, ni dans l'abrégé qu'il en a donné postérieurement, qu'il ait fait lui-même toutes les expériences; et il se contente d'en indiquer les résultats comme ayant été obtenus par Newton et par les autres physiciens.

En voilà plus qu'il n'en faut, je pense, pour prouver que, si je voulais entreprendre de révoquer en doute l'expérience par laquelle Newton prétend prouver indistinctement l'inaltérabilité des diverses couleurs du spectre, je ne me trouverais pas sur un terrain trop mauvais, sur-tout si je voulais faire entrer en considération l'influence que peuvent exercer des doctrines qui ont obtenu une grande vogue, et qu'on cherche plus à confirmer qu'à contredire, sur la manière de voir des expérimentateurs. Toujours sera-t-il vrai de dire que, si chaque sorte de rayon jouit d'une réfraction constante, il devrait être possible d'isoler complètement les unes des autres les couleurs du spectre, ce à quoi on n'a pu pourtant parvenir jusqu'ici; et que si, au contraire, chaque couleur est composée de rayons diversement réfrangibles, en lui faisant traverser un second prisme, elle doit se dilater un peu dans le sens perpendiculaire à la longueur de ce dernier (*).

(*) Je suis encore à comprendre pourquoi on s'est toujours obstiné à employer, pour ces expériences, un faisceau lumineux de forme conique, dont l'intensité est nécessairement d'autant moindre qu'on l'emploie plus loin du sommet du cône; et dont la divergence des filets vient d'ailleurs se compliquer avec celle qui s'opère par la dispersion dans le prisme. Rien ne serait pourtant plus facile que de se procurer un faisceau cylindrique extrêmement intense, et conséquemment beaucoup plus propre aux expériences; il ne s'agirait, en effet, pour cela, que de recevoir la lumière solaire sur une lentille convexe de grandes dimensions, placée au volet de la chambre obscure, et de changer ensuite la convergence en parallélisme, au moyen d'une lentille convenablement concave, placée un peu en-deçà du foyer.

Doit-on être surpris d'après cela que la doctrine de Newton ait trouvé et trouve même encore aujourd'hui des sceptiques ? et, si parmi ses adversaires elle a compté des *Rizzetti*, des *Regnaud*, des *Pardies*, des *Buniers*, des *Gordon*, des *Gautier* et des *Marat*, on y rencontre aussi des *Mariotte*, des *Dufay*, des *Lecat*, des *Prieur* et des *Wünsch*; et quel fond peut-on faire sur des expériences qu'il n'est donné de répéter avec succès qu'à un petit nombre de physiciens privilégiés ?

J'admets cependant, sans restriction aucune, toutes les expériences consignées dans l'optique de Newton ; j'accorde avec lui que, non seulement les rayons *rouge*, *jaune* et *bleu* du spectre, mais même les rayons *oranger*, *vert* et *violet*, reçus séparément sur un second prisme, et même sur tant d'autres qu'on voudra, n'y subissent pas la moindre décomposition, tandis qu'au contraire ce second prisme résout de suite en leurs élémens les mêmes trois dernières nuauces, formées artificiellement par le mélange des trois premières deux à deux ; et je prétends prouver qu'il n'en résulte pas nécessairement que toutes les couleurs du spectre soient des couleurs primitives et simples.

Je prie auparavant le lecteur de bien considérer que je n'ai aucunement ici le dessein de faire un systéme ; que j'envisage la chose sous un point de vue purement logique ; que, n'ayant opposé à la doctrine généralement admise que des doutes et des raisons de convenance, j'accorde qu'il se pourrait, en toute rigueur, qu'il y eût sept couleurs *primitives*, dans toute l'étendue de l'acception de ce mot ; ce que je me propose seulement d'établir, c'est que l'existence de ces *sept* couleurs ne résulte pas nécessairement des expériences desquelles on prétend s'appuyer pour l'établir ; et qu'en particulier ces expériences pourraient fort bien se concilier avec l'opinion, très-plausible d'ailleurs, de ceux qui n'admettraient, pour couleurs primitives proprement dites, que le *rouge*, le *jaune* et le *bleu*.

Dans l'état actuel de la science, on peut distinguer, dans les

rayons du spectre solaire, six qualités principales ; savoir : leur *coloration*, leur *réfrangibilité*, leur *force d'illumination*, leur *faculté calorifique*, leur *influence chimique* et leur *propriété magnétique*.

D'un autre côté, bien que la nature des molécules de la lumière nous soit absolument inconnue, on conçoit que deux de ces molécules, comparées l'une à l'autre, peuvent différer entre elles ou par leur *figure*, ou par leur *volume*, ou par leur *densité*, ou par leur *vitesse*, ou enfin par plusieurs de ces choses à la fois ; ce qui, au besoin, pourrait offrir *quinze* classes distinctes de molécules.

Mais, comme je n'ai seulement ici en vue que la *coloration* et la *réfrangibilité*, je supposerai que toutes les molécules de la lumière ont rigoureusement la même densité et la même vitesse ; et qu'elles ne diffèrent conséquemment les unes des autres que par la *figure* et par la *masse*.

Admettons que la réfrangibilité, indépendante de la figure, soit plus grande pour les molécules qui ont moins de masse et moindre pour celles qui en ont davantage.

Admettons encore que la *coloration*, ou l'impression sur l'organe, tout-à-fait indépendante de la masse, ne soit produite que par la figure seule ; et que les molécules de la lumière n'affectent que trois formes différentes. Pour fixer les idées, supposons que ces formes soient le *tétraèdre*, l'*octaèdre* et l'*icosaèdre* réguliers ; que le *tétraèdre* produise la sensation du *rouge*, l'*octaèdre* celle du *jaune*, et l'*icosaèdre* celle du *bleu*.

Admettons enfin que les molécules de chaque couleur, et, par conséquent, de chaque figure, ne soient point toutes égales en grosseur, ni conséquemment en masse ; que ces masses décroissent par degrés insensibles ; mais de manière pourtant, 1.° que les plus grosses molécules *rouges* aient plus de masse que toutes les autres ; 2.° que les plus grosses molécules *jaunes* aient plus de masse que

les plus petites molécules *rouges* ; 3.° que les plus grosses molécules *bleues* aient plus de masse que les plus petites molécules *jaunes* ; 4.° qu'enfin, outre une première série de molécules *rouges*, dont la plupart sont d'une masse égale à quelques molécules *jaunes*, mais toujours supérieure à celle des plus grosses molécules *bleues*, il existe une seconde série de ces molécules rouges, dont les molécules aient une masse inférieure à celle des plus grosses molécules *bleues*, mais non inférieure à celle des plus petites.

Ces suppositions admises, et elles n'ont, certes, rien qui répugne, toutes les expériences auxquelles on voudra soumettre un rayon solaire donneront évidemment des résultats identiques avec ceux qui se trouvent consignés dans l'optique de *Newton*. Ainsi, leur passage par le prisme donnera naissance à un spectre coloré présentant, du rouge au violet, une infinité de nuances parmi lesquelles on en remarquera *six* ou *sept* principales ; et chaque couleur en particulier, en traversant tant d'autres prismes qu'on voudra, ne pourra plus subir de décomposition ultérieure.

Dans cette hypothèse, l'*oranger*, le *vert* et le *violet* seront bien véritablement des *couleurs binaires* ; mais il en pourra exister de deux sortes, dans chaque espèce ; savoir : des couleurs binaires dont les molécules présenteront deux sortes de figures et deux sortes de masses ; et celles-ci se décomposeront facilement en traversant un prisme ; et des couleurs binaires dont les molécules présenteront également deux sortes de figures, mais des masses égales ; or, bien que la sensation produite sur l'œil par ces dernières soit en tout pareille à celle qu'il reçoit du choc des autres, elles résisteront néanmoins à tous les moyens de décomposition dont nous pouvons disposer ; elles ne seront pas *indécomposables*, mais elles demeureront *indécomposées*, tout aussi long-temps qu'on n'aura pas découvert des moyens d'agir sur elles différens de ceux qui nous sont présentement connus.

Je ne pense pas, au surplus, que rien de ce que je viens d'avancer ait

ait été désavoué par Newton lui-même. Plus réservé, et, pour ainsi dire, moins Newtonien que la plupart de ceux qui l'ont pris pour guide, il dit, dès les premières pages de son ouvrage : *Lumen cujus omnes radii sunt æque refrangibiles, id ego simplex, homogeneum, et similare appello...... Non quod id plane et omnimode homogeneum esse, affirmare velim; sed quod radii qui pari sunt refrangibilitate, iidem in istis saltem omnibus, de quibus in hoc libro disserendum erit, proprietatibus inter se conveniunt.* (*Optice*, traduct. latine de Sam. Clarke, Lausanne, 1740, pag. 4).

Et ailleurs (pag. 17) : *Observandum est autem, ex hisce experimentis non id continuo effici, ut illud omne lumen, quo e charta cærulea fluit, magis refrangibile putandum sit, quam id omne quod fluat e rubra : utrumque enim istorum luminum ex radiis diverse refrangibilibus compositum est; adeo ut in isto rubro lumine nonnulli sint radii nihilo minus refrangibiles quam radii in cæruleo et in isto cæruleo lumine nonnulli sint radii nihilo magis refrangibiles quam radii in rubro.*

Lyon, le 10 de janvier 1820.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Construction graphique approchée du problème de la duplication du cube;

Par M. GERGONNE.



J'AI montré, à la page 204 du précédent volume, comment, au moyen d'une parabole et de sa développée, exactement tracées à l'avance et une fois pour toutes, sur une feuille de cuivre ou de carton, on pouvait aisément parvenir à déterminer graphiquement, d'une manière approchée, les racines de toute équation donnée et numérique du troisième degré, et obtenir conséquemment une solution graphique approchée du problème de la *Trisection de l'angle.*

J'ai remarqué postérieurement que la même figure pouvait aussi très-simplement fournir une construction graphique approchée du problème de la *Duplication du cube.* La manière de l'employer à ce nouvel usage peut être comprise sous l'énoncé que voici, et qui me paraît n'être point dépourvu d'une certaine élégance.

Cherchez le point de la parabole dont l'ordonnée est égale à l'arète du cube donné; menez la normale de ce point, laquelle sera en même temps tangente à la développée en un certain point; cherchez le point de la développée dont l'ordonnée est double de celle de celui-là; par ce nouveau point, menez à la développée une tangente, qui sera en même temps normale à la parabole en

un second point; l'ordonnée de ce dernier point sera l'arète du cube cherché, double en volume du cube donné.

Soit, en effet, l'équation de la parabole

$$y'^2=4cx';$$

l'équation d'une normale sera

$$y-y'=-\frac{y'}{2c}(x-x'),$$

ou

$$2c(y-y')+y'(x-x')=0.$$

Si l'on veut que le point (x, y) soit un point de la développée, il faudra qu'en différentiant cette dernière équation par rapport à x', y', les coordonnées x, y demeurent constantes, ce qui donnera

$$[(x-x')-2c]\frac{dy'}{dx'}=y';$$

mais la différentielle de l'équation de la parabole est

$$y'\frac{dy'}{dx'}=2c;$$

éliminant donc $\frac{dy'}{dx'}$ entre ces deux équations, il viendra

$$2c[(x-x')-2c]=y'^2;$$

éliminant enfin $x-x'$ entre cette dernière équation et celle de la normale, on aura

$$y'^3=-4c^2y;$$

ce qui nous apprend que *les ordonnées des divers points de la développée sont proportionnelles aux cubes des ordonnées des points correspondans de la parabole*, et justifie ainsi la construction indiquée plus haut.

On voit en même temps qu'une construction tout-à-fait analogue résoudrait le problème, plus général, où il s'agirait de *déterminer l'arète d'un cube dont le volume fût à celui d'un autre cube dont l'arète est donnée dans un rapport donné.*

Si la parabole avait une étendue trop bornée pour qu'on pût l'employer à la solution immédiate du problème, on substituerait à l'arète du cube donné, sa moitié, son tiers, son quart, ou tout autre de ses sous-multiples, et, opérant comme nous l'avons prescrit ci-dessus, on parviendrait au même sous-multiple de l'arète cherchée.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'Analise indéterminée.

QUELLES sont les valeurs entières les plus générales de x et y qui rendent entière la fonction $\frac{xy}{x+y}$?

Problème de Combinaison.

Démontrer, *à priori*, l'identité entre les formules qui résolvent les deux problèmes suivans :

I. De combien de manières peut-on choisir n choses parmi m choses toutes différentes les unes des autres ; ou, ce qui revient au même, combien de termes peut avoir, au plus, un polynome homogène de n dimensions, formé avec m lettres dont aucune n'est répétée plusieurs fois dans un même terme ?

II. De combien de manières peut-on choisir n choses parmi $m-n+1$ sortes de choses, en nombre indéfini de chaque sorte, avec la faculté de prendre tant ou si peu de choses de chaque sorte qu'on voudra ; ou, en d'autres termes, combien de termes doit avoir un polynome homogène *complet* de n dimensions, fonction de $m-n+1$ lettres ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Recherches d'analise, relatives au développement des fonctions;

Par M. Frédéric Sarrus, professeur de mathématiques au collége de Pezenas;

Soit l'équation

$$x=f(a,b,x),$$

et soient U, V des fonctions entièrement arbitraires de x sans a, b; on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU}{da}&=\frac{dU}{dx}\frac{dx}{da},\\ \frac{dU}{db}&=\frac{dU}{dx}\frac{dx}{db};\end{aligned}\right\}(1)\qquad\left.\begin{aligned}\frac{dV}{da}&=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{da},\\ \frac{dV}{db}&=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{db}.\end{aligned}\right\}(2)$$

les équations des deux couples donnent, par division,

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\frac{dx}{db}}=\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{db}},\qquad\frac{\frac{dx}{da}}{\frac{dx}{db}}=\frac{\frac{dV}{da}}{\frac{dV}{db}};$$

et en égalant ces deux valeurs

$$\frac{dU}{da}\cdot\frac{dV}{db}=\frac{dU}{db}\cdot\frac{dV}{da}\,. \qquad (3)$$

L'on a encore

$$\frac{d.V\frac{dU}{da}}{db}=V\frac{d^2U}{dbda}+\frac{dV}{db}\,\frac{dU}{da}\;;$$

$$\frac{d.V\frac{dU}{db}}{da}=V\frac{d^2U}{dadb}+\frac{dV}{da}\,\frac{dU}{db}\;;$$

mais, en vertu de l'équation (3),

$$V\frac{d^2U}{dadb}=V\frac{d^2U}{dbda}\,,\quad \text{et}\quad \frac{dV}{db}\,\frac{dU}{da}=\frac{dV}{da}\,\frac{dU}{db}\;;$$

donc finalement

$$\frac{d.V\frac{dU}{da}}{db}=\frac{d.V\frac{dU}{db}}{da}\;; \qquad (4)$$

et l'on aurait semblablement

$$\frac{d.U\frac{dV}{da}}{db}=\frac{d.U\frac{dV}{db}}{da}\,.$$

Si l'on avait

$$x=f(a\,,b\,,x\,,x')\,,\qquad x_1=f_1(a_1\,,b_1\,,x\,,x_1)\;;$$

et que U, V fussent des fonctions quelconques de x, x_1, sans a, b, a_1, b_1; on trouverait, comme dans ce qui précède,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dU}{da}\cdot\frac{dV}{db}=\frac{dU}{db}\cdot\frac{dV}{da}\\[2ex]\frac{dU}{da'}\cdot\frac{dV}{db'}=\frac{dU}{db'}\cdot\frac{dV}{da'}\end{array}\right\}\quad(5)$$

d'où on déduirait

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d.V\frac{dU}{da}}{db}=\frac{d.V\frac{dU}{db}}{da}\\[2ex]\frac{d.V\frac{dU}{da'}}{db'}=\frac{d.V\frac{dU}{db'}}{da'}\end{array}\right\}\quad(6)$$

et aussi

$$\frac{d.U\frac{dV}{da}}{db}=\frac{d.U\frac{dV}{db}}{da},$$

$$\frac{d.U\frac{dV}{da'}}{db'}=\frac{d.U\frac{dV}{db'}}{da'}.$$

Les équations (4, 6) peuvent être utilement employées au développement de certaines fonctions. Soit, par exemple, U à développer suivant les puissances de b, lorsque x est donnée par l'équation

$$x=f(a+bz)\,; \qquad (7)$$

z désignant une fonction quelconque de x, sans a ni b. Nous déduirons d'abord de l'équation (7)

$$\frac{dx}{da}=\left(1+b\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{da}\right)f'(a+bz)\,;$$

f' désignant ici la fonction prime de f; cela donnera

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}=\frac{\mathrm{f}'(a+bz)}{1-b\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{f}'(a+bz)}\,;$$

on trouverait de la même manière

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}=\frac{z\,\mathrm{f}'(a+bz)}{1-b\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{f}'(a+bz)}\,.$$

La comparaison de ces deux valeurs donne

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}b}=z\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\;;$$

comparant ensuite ce résultat avec les équations (1), il viendra

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}b}=z\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}\;; \qquad (8)$$

ce qui fera devenir l'équation (4)

$$\frac{\mathrm{d}.V\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}b}=\frac{\mathrm{d}.zV\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}a}\;; \qquad (9)$$

changeant ensuite V en z^n, on aura, pour ce cas particulier,

$$\frac{\mathrm{d}.z^n\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}b}=\frac{\mathrm{d}.z^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}a}\,. \qquad (10)$$

L'équation (8) donnera donc, en vertu de cette dernière,

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}b^2}=\frac{\mathrm{d}.z\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}b}=\frac{\mathrm{d}.z^2\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}}{\mathrm{d}a}\;;$$

d'où on conclura, de la même manière,

$$\frac{d^3U}{db^3}=\frac{d^2.z^2\,\frac{dU}{da}}{da\,db}=\frac{d^2.z^3\,\frac{dU}{da}}{da^2}\;;$$

et de celle-là

$$\frac{d^4U}{db^4}=\frac{d^3.z^3\,\frac{dU}{da}}{da^2db}=\frac{d^3.z^4\,\frac{dU}{da}}{da^3}\;;$$

et ainsi de suite ; de manière qu'on aura, en général,

$$\frac{d^mU}{db^m}=\frac{d^{m-1}.z^m\,\frac{dU}{da}}{da^{m-1}}\;. \qquad (11)$$

Une fois parvenu à la formule (11), le développement de U, suivant les puissances de b ne présente plus de difficulté.

Soit encore

$$x=f(a+bz)\;; \qquad x_1=f_1(a_1+b_1z_1)\;;$$

z, z_1 étant des fonctions quelconques de x, x_1 sans a, b, a_1, b_1. On trouvera, par la différentiation,

$$\frac{dx}{da}=\left(1+b\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da}+b\,\frac{dz}{dx_1}\,\frac{dx_1}{da}\right)f'(a+bz)\;,$$

$$\frac{dx_1}{da}=\left(b_1\frac{dz_1}{dx}\,\frac{dx}{da}+b_1\,\frac{dz_1}{dx_1}\,\frac{dx_1}{da}\right)f'_1(a_1+b_1z_1)\;.$$

En posant, pour abréger,

$$k=\frac{b_1\,\frac{dz_1}{dx}\,f'_1(a_1+b_1z_1)}{1-b_1\,\frac{dz_1}{dx_1}\,f'_1(a_1+b_1z_1)}\;,$$

la dernière de ces équations donne

$$\frac{dx_1}{da}=k\frac{dx}{da}\ ;$$

d'où on conclut, au moyen de la première,

$$\frac{dx}{da}=\frac{f'(a+bz)}{1-b\left(\frac{dz}{dx}+k\frac{dz}{dx_1}\right)f'(a+bz)}\ .$$

On trouvera semblablement

$$\frac{dx_1}{db}=k\frac{dx}{db}\ ,$$

$$\frac{dx}{db}=\frac{zf'(a+bz)}{1-b\left(\frac{dz}{dx}+k\frac{dz}{dx_1}\right)f'(a+bz)}\ .$$

Ces équations, comparées aux précédentes, donnent

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{db}=z\frac{dx}{da}\ ,\\[2ex] \frac{dx_1}{db}=z\frac{dx_1}{da}\ .\end{array}\right\}\quad(12)$$

En suivant la marche qui a conduit à celles-ci, nous trouverons semblablement

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{db_1}=z_1\frac{dx}{da_1}\ ,\\[2ex] \frac{dx_1}{db_1}=z_1\frac{dx_1}{da_1}\ .\end{array}\right\}\quad(13)$$

En observant donc que

$$\frac{dU}{da} = \frac{dU}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dU}{dx_1}\,\frac{dx_1}{da},$$

$$\frac{dU}{db} = \frac{dU}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dU}{dx_1}\,\frac{dx_1}{db},$$

$$\frac{dU}{da_1} = \frac{dU}{dx}\,\frac{dx}{da_1} + \frac{dU}{dx_1}\,\frac{dx_1}{da_1},$$

$$\frac{dU}{db_1} = \frac{dU}{dx}\,\frac{dx}{db_1} + \frac{dU}{dx_1}\,\frac{dx_1}{db_1},$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{db} &= z\,\frac{dU}{da}, \\ \frac{dU}{db_1} &= z_1\,\frac{dU}{da_1}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Enfin, en suivant la marche qui nous a conduit des équations (4, 8) à la formule (11), nous parviendrons aux suivantes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^mU}{db^m} &= \frac{d^{m-1}.z^m\,\frac{dU}{da}}{da^{m-1}}, \\ \frac{d^{m_1}U}{db_1^{m_1}} &= \frac{d^{m_1-1}\,z_1^{m_1}\,\frac{dU}{da_1}}{da_1^{m_1-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Pour compléter cette recherche, il faut parvenir à l'expression de

$$\frac{d^{m+m_1}U}{db^m db_1^{m_1}}.$$

Pour cela, soit

$$z^m \frac{dU}{da} = \frac{d.pU}{db} + \frac{d.qU}{da}\,; \qquad (16)$$

p, q étant des fonctions de x, x_1, satisfaisant, pour U, aux équations (15), du moins en ce qui concerne p. Avec cette restriction, l'on trouvera, en développant

$$z^m \frac{dU}{da} = U\left(z\frac{dp}{da} + \frac{dq}{da}\right) + \frac{dU}{da}(zp+q)\,;$$

et, comme il suffit de satisfaire à cette equation, nous poserons

$$z\frac{dp}{da} + \frac{dq}{da} = 0,$$

$$zp+q = z^m\,;$$

différentiant la seconde par rapport à a, elle se réduira, en vertu de la première, à

$$p\frac{dz}{da} = mz^{m-1}\frac{dz}{da}\,, \quad \text{d'où} \quad p = mz^{m-1}\,;$$

mettant cette valeur de p dans la seconde des équations précédentes, on trouvera pour q

$$q = -(m-1)z^m\,;$$

et l'équation (16) deviendra

$$z^m \frac{dU}{da} = m\frac{d.z^{m-1}U}{db} - (m-1)\frac{d.z^mU}{da}\,;$$

d'où on conclura

d^m,

$$\frac{d^{m_1}.z^m \frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}} = md.\frac{\frac{d^{m_1}.z^{m-1}U}{db_1^{m_1}}}{db} - (m-1)d.\frac{\frac{d^{m_1}.z^m U}{db_1^{m_1}}}{da};$$

mais, en vertu des équations (15), on a

$$\frac{d^{m_1}.z^{m-1}U}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1}.z_1^{m_1}\frac{d.z^{m-1}U}{da_1}}{da_1^{m_1-1}},$$

et encore

$$\frac{d^{m_1}.z^m U}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1}.z_1^{m_1}\frac{d.z^m U}{da_1}}{da_1^{m_1-1}};$$

ainsi l'on aura

$$\frac{d^{m_1}.z^m \frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1}\left(m\frac{d.z_1^{m_1}\frac{d.z^{m-1}U}{da_1}}{db} - (m-1)\frac{d.z_1^{m_1}\frac{d.z^m U}{da_1}}{da}\right)}{da_1^{m_1-1}};$$

en observant que la quantité dans les parenthèses peut être mise sous cette forme

$$z^m z_1^{m_1}\frac{d^2U}{da\,da_1} + z_1^{m_1}\frac{d.z^m}{da_1}\frac{dU}{da} + z^m\frac{d.z_1^{m_1}}{da}\frac{dU}{da_1},$$

il viendra finalement

$$\frac{d^{m_1}.z^m \frac{dU}{da}}{db_1^{m_1}} = \frac{d^{m_1-1}\left(z^m z_1^{m_1}\frac{d^2U}{da\,da_1} + z_1^{m_1}\frac{d.z^m}{da_1}\frac{dU}{da} + z_1^{m}\frac{d.z_1^{m_1}}{da}\frac{dU}{da_1}\right)}{da_1^{m_1}};$$

mais on a

$$\frac{d^{m+m_1}U}{db^m db_1^{m_1}} = \frac{d^{m+m_1-1}.z^m\frac{dU}{da}}{da^{m-1}db_1^{m_1}};$$

partant

$$\frac{d^{m+m_1}U}{db^m db_1^{m_1}}=\frac{d^{m+m_1-2}.\left(z^m z_1^{m_1}\frac{d^2U}{dada_1}+z_1^{m_1}\frac{dz^m}{da_1}\frac{dU}{da}+z^m\frac{dz_1^{m_1}}{da}\frac{dU}{da_1}\right)}{da^{m-1}da_1^{m_1-1}}.(17)$$

Une fois parvenus à la formule (17), le développement de U, suivant les puissances et produits des puissances de b, b_1 ne saurait plus offrir aucune difficulté.

Il est aisé de voir, d'après ce qui précède, ce qu'on aurait à faire, si, ayant les trois équations

$$x=f(a+bz),$$

$$x_1=f_1(a_1+b_1z_1),$$

$$x_2=f_2(a_2+b_2z_2);$$

où z, z_1, z_2 sont supposés des fonctions quelconques de x, x_1, x_2, sans a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, il s'agissait de développer U, suivant les puissances et produits de puissances de b, b_1, b_2; U etant lui-même une fonction de x, x_1, x_2, sans a, b, a_1, b_1, a_2, b_2; et il en serait de même pour un plus grand nombre d'équations entre un pareil nombre de fonctions.

Nous terminerons par observer que M. Laplace était depuis longtemps parvenu à la formule (17) et à ses analogues; mais seulement dans la supposition où b, b_1 devaient, après les différentiations, être faits égaux à zéro; ce n'est même qu'en admettant cette hypothèse, que M. Lacroix est parvenu aux équations (14); voyez son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, deuxième édition, tom. I, pag. 281.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Du développement des fractions rationnelles composées en fractions partielles ;

Par M. ***

1. Cette matière a eté traitée, avec beaucoup de soin et d'étendue, dans l'*Introductio in analisin infinitorum* d'Euler, et ensuite dans les *Institutiones calculi differentialis* du même auteur. Cependant, je ne crois pas que les méthodes consignées dans ces excellens ouvrages soient à la fois les plus faciles et les plus expéditives. Je vais en exposer une qui, à plusieurs égards, me paraît mériter la préférence.

Problème I.

2. Etant donné la fraction $\frac{1}{(1-\alpha x+\beta x^2)^m}$, dans laquelle $1-\alpha x+\beta x^2$ est le produit des deux facteurs inégaux $1-px$, $1-p'x$, on propose de la décomposer en cette suite de fractions partielles

$$\frac{A}{(1-px)^m}+\frac{B}{(1-px)^{m-1}}+\frac{C}{(1-px)^{m-2}}+\ldots+\frac{Z}{1-px}$$

$$+\frac{A'}{(1-p'x)^m}+\frac{B'}{(1-p'x)^{m-1}}+\frac{C'}{(1-p'x)^{m-2}}+\ldots+\frac{Z'}{1-p'x}\,?$$

Je fais

$$1-px=\omega\,,\quad \text{d'où}\quad x=\frac{1}{p}-\frac{\omega}{p}\,;$$

et par conséquent

$$1-\alpha x+\beta x^2=\left(\frac{\alpha}{p}-\frac{2\beta}{p^2}\right)\omega+\frac{\beta}{p^2}\omega^2=a\omega+b\omega^2\,,$$

en posant, pour abréger,

$$a=\frac{\alpha}{p}-\frac{2\beta}{p^2}\,,\qquad b=\frac{\beta}{p^2}\,:$$

Donc la fraction proposée

$$\frac{1}{(1-\alpha x+\beta x^2)^m}=\frac{1}{\omega^m(a+b\omega)^m}\,:$$

Mais, en ordonnant la suite qui résulte de cette fraction par rapport à $\frac{1}{\omega}$, comme il conviendrait dans l'hypothèse de ω infiniment petit, il est clair que les m premiers termes de la suite ainsi ordonnée seraient $\frac{A}{\omega^m}+\frac{B}{\omega^{m-1}}+\frac{C}{\omega^{m-2}}+\ldots+\frac{Z}{\omega}$; puisque le développement des autres parties $\frac{A'}{(1+p'x)^m}+\frac{B'}{(1+p'x)^{m-1}}+\ldots\ldots\ldots$, ne peut donner aucune puissance négative de ω; donc les m termes

$$\frac{A}{\omega^m}+\frac{B}{\omega^{m-1}}+\frac{C}{\omega^{m-2}}+\ldots\ldots+\frac{Z}{\omega}\,,$$

sont précisément les m premiers termes que fournira le développement de l'expression $\frac{1}{\omega^m(a+b\omega)^m}$.

Mais on a

$$\frac{1}{(a+b\alpha)^m}=\frac{1}{a^m}\left(1-\frac{m}{1}\,\frac{b}{a}\alpha+\frac{m}{1}\,\frac{m+1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\alpha^2-\frac{m}{1}\,\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}\alpha^3+\ldots\right)$$

donc

$$A=\frac{1}{a^m}\,,\quad B=-\frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a}A\,,\quad C=\frac{m}{1}\,\frac{m+1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}A\,,\ldots\ldots,$$

jusqu'à ce qu'on ait m de ces quantités.

En opérant semblablement sur l'autre facteur $1-p'x$, et faisant

$$a'=\frac{\alpha}{p'}-\frac{2\beta}{p'^2}\,,\quad b'=\frac{\beta}{p'^2}\,,$$

la fraction $\frac{1}{(1-\alpha x+\beta x^2)^m}$ se trouvera décomposée en ces deux suites

$$\frac{1}{a^m}\left\{\frac{1}{(1-px)^m}-\frac{m}{1}\,\frac{b}{a}\,\frac{1}{(1-px)^{m-1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{1}{(1-px)^{m-2}}-\ldots\right\}$$

$$+\frac{1}{a'^m}\left\{\frac{1}{(1-p'x)^m}-\frac{m}{1}\,\frac{b'}{a'}\,\frac{1}{(1-p'x)^{m-1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\,\frac{b'^2}{a'^2}\,\frac{1}{(1-px)^{m-2}}-\ldots\right\}$$

dont chacune doit avoir m termes.

Puisque $\alpha=p+p'$ et $\beta=pp'$, les quantités a, b, a', b' peuvent s'exprimer par le moyen de p et p' seulement; ainsi on aura

$$a=\frac{p-p'}{p}\,,\quad \frac{b}{a}=\frac{p'}{p-p'}\,,\quad a'=\frac{p'-p}{p'}\,,\quad \frac{b'}{a'}=\frac{p}{p'-p}\,.$$

3. Si l'on suppose que le développement de la fraction $\frac{1}{(1-\alpha x+\beta x^2)^m}$ donne la suite recurrente

$$1+t'x+t''x^2+t'''x^3+\ldots\ldots\ldots+t^{(n)}x^n+\ldots\ldots;$$

pour en avoir le terme général $t^{(n)}$, on fera, pour abréger,

$$\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\cdots\frac{n+m-1}{m-1}=V^m,$$

$$\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\cdots\frac{n+m-2}{m-2}=V^{m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

et le terme général demandé sera

$$t^{(n)}=\frac{p^n}{a^m}\left\{V^m-\frac{m}{1}\frac{b}{a}V^{m-1}+\frac{m}{1}\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^2}V^{m-2}-\ldots\ldots\right\}$$

$$+\frac{p'^n}{a'^m}\left\{V^m-\frac{m}{1}\frac{b'}{a'}V^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b'^2}{a'^2}V^{m-2}-\ldots\ldots\right\}.$$

4. Si les facteurs de $1-\alpha x+\beta x^2$ sont imaginaires, on les représentera par $1-f(\text{Cos.}\varphi+\sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi)x$ et $1-f(\text{Cos.}\varphi-\sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi)x$; et, comme on peut prendre $f=1$ sans que le calcul en soit moins général, on aura

$$p=\text{Cos.}\varphi+\sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi,$$

$$p'=\text{Cos.}\varphi-\sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi;$$

mais alors $\alpha=2\text{Cos.}\varphi$, $\beta=1$; donc

$$a=2\text{Sin.}\varphi\sqrt{-1}.(\text{Cos.}\varphi-\sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi),$$

$$b=\text{Cos.}2\varphi-\sqrt{-1}\text{Sin.}2\varphi,$$

$$\frac{1}{a}=\frac{\text{Cos.}\varphi+\sqrt{-1}\text{Sin.}\varphi}{2\text{Sin.}\varphi.\sqrt{-1}}=\frac{\text{Cos.}(90^\circ-\varphi)-\sqrt{-1}\text{Sin.}(90^\circ-\varphi)}{2\text{Sin.}\varphi};$$

On aura semblablement a', b', en changeant le signe de $\sqrt{-1}$;

donc, la suite qui vient du développement de la fraction $\frac{1}{(1-2x\text{Cos.}\varphi+x^2)^m}$ a pour terme général

$$\varphi^{(n)}=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\cdots\frac{n+m-1}{m-1}\cdot\frac{\text{Cos.}[(m+n)\varphi-m.90^\circ]}{2^{m-1}\text{Sin.}^m\varphi}$$

$$-\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\cdots\frac{n+m-2}{m-2}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{\text{Cos.}[(m+n-1)\varphi-(m+1).90^\circ]}{2^m.\text{Sin.}^{m+1}\varphi}$$

$$+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\frac{n+m-3}{m-3}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{\text{Cos.}[(m+n-2)\varphi-(m+2).90^\circ]}{2^{m+1}.\text{Sin.}^{m+1}\varphi}$$

$$-\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\frac{n+m-4}{m-4}\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{\text{Cos.}[(m+n-3)\varphi-(m+3).90^\circ]}{2^{m+2}.\text{Sin.}^{m+3}\varphi}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait m termes.

5. On peut simplifier cette formule, en réduisant des termes au même dénominateur ; alors elle devient, après plusieurs réductions

$$\varphi^{(n)}=\frac{n+m+1}{1}\cdot\frac{n+m+2}{2}\cdot\frac{n+m+3}{3}\cdot\frac{n+m+4}{4}\cdots\frac{n-2m-1}{m-1}\cdot\frac{\text{Sin.}(n+1)\varphi}{2^{2m-2}\text{Sin.}^{2m-1}\varphi}$$

$$-\frac{m-1}{1}\cdot\frac{n+m+2}{2}\cdot\frac{n+m+3}{3}\cdot\frac{n+m+4}{4}\cdots\cdots\frac{n-2m-1}{m-1}\cdot\frac{\text{Sin.}(n+3)\varphi}{2^{2m-2}\text{Sin.}^{2m-1}\varphi}$$

$$+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{n+m+3}{3}\cdot\frac{n+m+4}{4}\cdots\cdots\frac{n-2m-1}{m-1}\cdot\frac{\text{Sin.}(n+5)\varphi}{2^{2m-2}\text{Sin.}^{2m-1}\varphi}$$

$$-\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{n+m+4}{4}\cdots\cdots\frac{n-2m-1}{m-1}\cdot\frac{\text{Sin.}(n+7)\varphi}{2^{2m-2}\text{Sin.}^{2m-1}\varphi}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Euler a démontré cette formule pour quelques cas particuliers ; dans son *Introduction*.

Problème. II.

6. Décomposer la fraction $\frac{1}{(1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3)^m}$ en cette suite de fractions simples

$$\frac{A}{(1-px)^m}+\frac{B}{(1-px)^{m-1}}+\frac{C}{(1-px)^{m-2}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{Z}{1-px}$$

$$+\frac{A'}{(1-p'x)^m}+\frac{B'}{(1-p'x)^{m-1}}+\frac{C'}{(1-p'x)^{m-2}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{Z'}{1-p'x}$$

$$+\frac{A''}{(1-p''x)^m}+\frac{B''}{(1-p''x)^{m-1}}+\frac{C''}{(1-p''x)^{m-2}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{Z''}{1-p''x};$$

en supposant que $1-px$, $1-p'x$; $1-p''x$ sont les trois facteurs inégaux de $1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3$?

Soit $1-px=\omega$, d'où $x=\frac{1-\omega}{p}$; en posant pour abréger

$$\frac{\alpha}{p}-\frac{2\beta}{p^2}+\frac{3\gamma}{p^3}=a,$$

$$\frac{\beta}{p^2}-\frac{3\gamma}{p^3}=b;$$

$$\frac{\gamma}{p^3}=c;$$

la quantité $1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3$ deviendra $a\omega+b\omega^2+c\omega^3$. Mais ; en regardant ω comme infiniment petit, les seuls termes infinis qui résultent de la fraction proposée sont

A

$$\frac{A}{\omega^m}+\frac{B}{\omega^{m-1}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{Z}{\omega};$$

Ces mêmes termes se tireront de l'expression $\frac{1}{\omega^m(a+b\omega+c\omega^2)^m}$ développée jusqu'au m.[me] terme, et par conséquent on aura

$$\frac{1}{(a+b\omega+c\omega)^m}=A+B\omega+C\omega^2+\ldots\ldots+Z\omega^{m-1};$$

égalité vraie, en développant le premier membre jusqu'à la puissance $m-1$ de ω seulement.

7. On aura donc

$$A=\frac{1}{a^m},$$

$$B=-\frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a}A;$$

$$C=+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}A-\frac{m}{1}\cdot\frac{c}{a}A,$$

$$D=-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}A+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2}A;$$

. . . .

D'ailleurs, le terme général des quantités A, B, C, D, ... est assignable; car, au lieu de la suite $\frac{A}{\omega^m}+\frac{B}{\omega^{m-1}}+\frac{C}{\omega^{m-2}}+\ldots$, soit pris, pour plus de simplicité, $\frac{A}{\omega^m}(1-T'\omega+T''\omega^2-T'''\omega^3+\ldots\ldots)$; et on aura $T^{(k)}$, c'est-à-dire, le terme qu'on voudra, dans la suite T', T'', T''', ... exprimé de cette manière,

$$T^{(k)} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdots\cdots\cdots \frac{m+k-1}{k} \cdot \frac{b^k}{a^k}$$

$$- \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdots\cdots\cdots \frac{m+k-2}{k-1} \cdot \frac{k-1}{1} \cdot \frac{b^{k-2}c}{a^{k-1}}$$

$$+ \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdots\cdots \frac{m+k-3}{k-2} \cdot \frac{k-2}{1} \cdot \frac{k-3}{2} \cdot \frac{b^{k-4}c^2}{a^{k-2}}$$

$$- \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \cdots\cdots \frac{m+k-4}{k-3} \cdot \frac{k-3}{1} \cdot \frac{k-4}{2} \cdot \frac{k-5}{3} \cdot \frac{b^{k-6}c^3}{a^{k-3}}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si, relativement aux autres racines p', p'', on fait les mêmes opérations, et que les quantités analogues à $T^{(k)}$ soient $S^{(k)}$ et $V^{(k)}$, la fraction proposée se changera en ces trois suites de fractions simples

$$\frac{1}{a^m}\left\{\frac{1}{(1-px)^m} - \frac{T'}{(1-px)^{m-1}} + \frac{T''}{(1-px)^{m-2}} - \frac{T'''}{(1-px)^{m-3}} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{1}{a'^m}\left\{\frac{1}{(1-p'x)^m} - \frac{S'}{(1-p'x)^{m-1}} + \frac{S''}{(1-p'x)^{m-2}} - \frac{S'''}{(1-p'x)^{m-3}} + \cdots\right\}$$

$$+ \frac{1}{a''^m}\left\{\frac{1}{(1-p''x)^m} - \frac{V'}{(1-p''x)^{m-1}} + \frac{V''}{(1-p''x)^{m-2}} - \frac{V'''}{(1-p''x)^{m-3}} + \cdots\right\}$$

Au lieu de déduire les quantités T', T'', T''', ... et leurs analogues de la loi générale exposée ci-dessus, on pourra, si l'on veut, les tirer du développement de la fraction $\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)^m}$, qui doit donner $1-T'x+T''x^2-T'''x^3+\ldots\ldots$, jusqu'au $m.^{me}$ terme inclusi-

vement ; de sorte que, dans ce développement, on pourra négliger ω^m et les puissances supérieures de ω.

8. Si la quantité $1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3$ avait deux facteurs égaux $1-px$, $1-p'x$, la quantité a serait zéro ; et en faisant toujours $1-px=\omega$, on aurait à développer $\frac{1}{\omega^{2m}(b+c\omega)^m}$, ce qui donnerait

$$\frac{1}{b^m}\left(\frac{1}{\omega^{2m}}-\frac{m}{1}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{1}{\omega^{2m-1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{1}{\omega^{2m-2}}-\ldots\ldots\right);$$

et il faudrait prendre $2m$ termes de cette suite.

Quant au troisième facteur $1-p''x$, on pourrait opérer comme dans le cas général ; mais, comme alors $a''+b''\omega+c''\omega^2$ ne peut manquer d'être un quarré, le résultat doit être fort simple.

Pour y parvenir directement, je considère la quantité $\frac{1}{(1-fx)^{2m}(1-gx)^m}$ ou, plus généralement, $\frac{1}{(1-fx)^n(1-gx)^m}$. Je fais $1-fx=\omega$, elle devient $\frac{f^m}{(f-g)^m\omega^n\left(1+\frac{g}{f-g}\omega\right)^m}$, d'où résulte la suite

$$\frac{f^m}{(f-g)^m}\left\{\frac{1}{(1-fx)^n}-\frac{m}{1}\cdot\frac{g}{(f-g)(1-fx)^{n-1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{g^2}{(f-g)^2(1-fx)^{n-2}}-\ldots\right\}$$

dont il faut prendre n termes.

Supposons ensuite $1-gx=\varphi$; on aura une pareille suite pour l'autre facteur, et l'expression proposée $\frac{1}{(1-fx)^n(1-gx)^m}$ se partagera en ces deux suites

$$\frac{f^m}{(f-g)^m}\left\{\frac{1}{(1-fx)^n}-\frac{m}{1}\cdot\frac{g}{(f-g)(1-fx)^{n-1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{g^2}{(f-g)^2(1-fx)^{n-2}}-\ldots\right\}$$

$$+\frac{g^n}{(g-f)^n}\left\{\frac{1}{(1-gx)^m}-\frac{n}{1}\cdot\frac{f}{(g-f)(1-gx)^{m-1}}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{f^2}{(g-f)^2(1-gx)^{m-2}}-\ldots\right\}$$

la première devant avoir n termes et la seconde m.

Problème III.

9. *En général, soit la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, dans laquelle le plus grand exposant de* x *dans le dénominateur soit plus grand que dans le numérateur. Soit* $(1-px)^m$ *un facteur de Q; on demande les fractions partielles qui en résultent?*

En représentant ces fractions par

$$\frac{A}{(1-px)^m}+\frac{B}{(1-px)^{m-1}}+\frac{C}{(1-px)^{m-2}}+\ldots\ldots+\frac{Z}{1-px},$$

je ferai, à l'ordinaire, $1-px=\omega$, et la fraction $\frac{P}{Q}$ deviendra de cette forme

$$\frac{\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2+\delta\omega^3+\ldots}{\omega^m(a+b\omega+c\omega^2+d\omega^3+\ldots)};$$

je développerai en série la fraction

$$\frac{\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2+\delta\omega^3+\ldots}{a+b\omega+c\omega^2+d\omega^3+\ldots},$$

ce qui me donnera

$$A+B\omega+C\omega^2+D\omega^3+\ldots\ldots\ldots+Z\omega^{m-1},$$

en sorte que je n'aurai besoin que des m premiers termes de cette suite, et que je pourrai négliger, dans mon calcul, les ω^m, ω^{m+1}, ..., à mesure qu'ils se présenteront.

Je ferai un calcul semblable sur les autres facteurs du dénominateur Q, et ma fraction sera décomposée avec le moins de travail possible.

10. *Exemple I.* Soit proposé de décomposer la fraction

$$\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1-x)^2(1+2x)^3}.$$

1.° Relativement au facteur x^3, il n'est pas nécessaire de faire $x=\omega$; on peut développer $\frac{1-2x+3x^2}{(1-x)^2\,(1+2x)^3}$, jusqu'aux x^2 inclusivement; en rejetant les x^3, son dénominateur se réduit à $1+4x+x^2$, et l'on a

$$\frac{1-2x+3x^2}{1+4x+x^2}=1-6x+26x^2,$$

en se bornant à trois termes; donc les fractions partielles qui résultent du facteur x^3 sont

$$\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^2}+\frac{26}{x}.$$

2.° Soit $1-x=\omega$, ou $x=1-\omega$, la fraction $\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1+2x)^3}$ étant calculée en rejetant les ω^2 donnera

$$\frac{2-4\omega}{27(1-5\omega)}=\frac{2}{27}(1+3\omega);$$

donc les fractions partielles qui résultent du facteur $(1-x)^2$ sont

$$\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

3.° Si l'on fait enfin $1+2x=\omega$, d'où $x=-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2}$; la fraction $\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1-x)^2}$ deviendra, en rejetant les ω^3

$$-\frac{8(11-10\omega+3\omega^2)}{9-33\omega+46\omega^2}=-\frac{8}{9}\left(11+\frac{91}{3}\omega+58\omega^2\right);$$

donc le facteur $(1+2x)^3$ donnera les fractions partielles

$$-\frac{88}{9}\cdot\frac{1}{(1+2x)^3}-\frac{728}{27}\cdot\frac{1}{(1+2x)^2}-\frac{464}{9}\cdot\frac{1}{1+2x}.$$

Rassemblant donc ces trois résultats, on aura

$$\frac{1-2x+3x^2}{x^3(1-x)^2(1+2x)^3}=\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^2}+\frac{26}{x}+\frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$-\frac{88}{9}\cdot\frac{1}{(1+2x)^3}-\frac{728}{27}\cdot\frac{1}{(1+2x)^2}-\frac{464}{27}\cdot\frac{1}{1+2x}.$$

Exemple 2. Soit proposé de décomposer en fractions partielles la fraction

$$\frac{x^{m-1}}{1-2a^nx^n\text{Cos.}\theta+a^{2n}x^{2n}}?$$

(Voyez cet exemple à la fin du *Calcul différentiel* d'EULER.)

Si l'on appelle π l'arc de 180°, et qu'on prenne

$$\varphi=\frac{2k\pi\pm\theta}{n},$$

k étant un entier ; un facteur quelconque du dénominateur sera $1-ax(\text{Cos.}\varphi\pm\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varphi)$. Soit donc

$$1-ax(\text{Cos.}\varphi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varphi)=e,$$

on

$$x=\frac{\text{Cos.}\varphi-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varphi}{a}-\frac{e}{a}(\text{Cos.}\varphi-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varphi);$$

comme il n'y a point de facteurs égaux, il suffira d'avoir, dans le numérateur, le terme constant, et dans le dénominateur celui qui est affecté de e au premier degré. On aura donc

$$\frac{x^{m-1}}{1-2a^n x^n \text{Cos.}\theta + a^{2n} x^{2n}} = \frac{1}{a^{m-1}} \cdot \frac{\text{Cos.}(m-1)\varphi - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}(m-1)\varphi}{2n\omega(\text{Cos.}n\varphi - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}n\varphi) - 2n\omega(\text{Cos.}2n\varphi - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}2n\varphi)}$$

Mais, à cause de $\text{Cos.}n\varphi = \text{Cos.}\theta$ et $\text{Sin.}n\varphi = \pm \text{Sin.}\theta$, cette expression devient

$$\pm \frac{1}{2a^{m-1}\text{Sin.}\theta} \cdot \frac{-\sqrt{-1}\,\text{Cos.}(m-n-1)\varphi - \text{Sin.}(m-n-1)\varphi}{1-ax(\text{Cos.}\varphi + \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varphi)};$$

C'est la fraction partielle demandée. Elle ne peut manquer d'être accompagnée de la fraction

$$\pm \frac{1}{2a^{m-1}\text{Sin.}\theta} \cdot \frac{+\sqrt{-1}\,\text{Cos.}(m-n-1)\varphi - \text{Sin.}(m-n-1)\varphi}{1-\text{Cos.}ax(\varphi - \sqrt{-1}\,\text{Sin.}\varphi)};$$

la somme des deux donnera la fraction réelle

$$\pm \frac{1}{2a^{m-1}\text{Sin.}\theta} \cdot \frac{ax\text{Sin.}(m-n)\varphi - \text{Sin.}(m-n-1)\varphi}{1-2ax\text{Cos.}\varphi + a^2x^2};$$

quant au signe ambigu, il est relatif à celui de θ dans la valeur $\varphi = \frac{2k\pi \pm \theta}{n}$.

Si l'on donne à k les valeurs successives 0, 1, 2,....., jusqu'à ce qu'on ait n de ces fractions, leur somme sera égale à la fraction proposée.

Problème. IV.

12. Soit $(1-\alpha x+\beta x^2)^n$ un facteur du dénominateur de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$; on propose de trouver directement les fractions partielles

$$\frac{A+Bx}{(1-\alpha x+\beta x^2)^n} + \frac{A'+B'x}{(1-\alpha x+\beta x^2)^{n-1}} + \frac{A''+B''x}{(1-\alpha x+\beta x^2)^{n-2}} + \ldots$$

sans être obligé de se servir des facteurs réels ou imaginaires de $1-\alpha x+\beta x^2$?

Je ferai $1-\alpha x+\beta x^2=\omega$, ou $x^2=\frac{-1+\alpha x+\omega}{\beta}$. Eliminant, au moyen de cette équation, toutes les puissances de x supérieures à la première, j'aurai

$$\frac{P}{Q}=\frac{M+nx}{\omega^n(F+Gx)},$$

dans laquelle M, N, F, G ne contiendront point d'x. On éliminera x absolument du dénominateur, en multipliant les deux termes de la fraction par $\mu+\nu x$, et prenant

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha G-\beta F}{\beta G};$$

on aura ainsi

$$\frac{P}{Q}=\frac{M'+N'x}{\omega^n R'}.$$

Faisant ensuite

$$\frac{M'}{R'}=A+A'\omega+A''\omega^2+\ldots\ldots$$

$$\frac{N'}{R'}=B+B'\omega+B''\omega^2+\ldots\ldots$$

on aura les coefficiens cherchés A, B, A', B', ...

13. *Exemple I.* Il s'agit de décomposer la fraction

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(1-x+x^2)}?$$

1.° Soit $1+x^2=\omega$; la fraction devient

$$\frac{1}{\omega^2(\omega-x)}.$$

Pour

Pour chasser tout-à-fait les x du dénominateur de $\frac{1}{\omega-x}$, je multiplie les deux termes par $\omega+x$, et j'ai

$$\frac{\omega+x}{1-\omega+\omega^2} \quad \text{ou simplement} \quad \frac{\omega+x}{1-\omega},$$

parce que ω^2 est inutile. Or, en rejetant toujours les ω^2,

$$\frac{\omega+x}{1-\omega}=\omega+x(1+\omega);$$

donc le facteur $(1+x^2)^2$ donne les fractions partielles

$$\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{x+1}{1+x^2};$$

2.° Soit $1-x+x^2=\omega$, ou $x^2=\omega-1+x$; la fraction proposée deviendra $\frac{1}{\omega(\omega+x)^2}$ ou simplement $\frac{1}{\omega(-1+x)}$. Maintenant $\frac{1}{-1+x}=\frac{x}{-1+\omega}=-x$; donc la fraction partielle qui résulte du facteur $1-x+x^2$ est $-\frac{x}{1-x+x^2}$, et par conséquent

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(1-x+x^2)}=\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{x+1}{1+x^2}-\frac{x}{1-x+x^2}.$$

14. *Exemple II.* Décomposer l'expression $\frac{1}{(1+4x^4)^3}$ en fractions partielles ?

Les facteurs de $1+4x^4$ sont $1+2x+2x^2$ et $1-2x+2x^2$. Soit $1+2x+2x^2=\omega$, on aura $\frac{1}{(1+4x^4)^3}=\frac{1}{\omega^3(\omega+4x)^3}$. Maintenant si, dans dans la quantité $\frac{1}{(\omega-4x)^3}$, on rejette les ω^3, et qu'on élimine les puissances de x supérieures à la première, on aura

$$\frac{1}{4[(8+20\omega+3\omega^2)x+8-2\omega-6\omega^2]}.$$

Pour chasser les x du dénominateur, je trouve qu'il faut multiplier les deux termes par $(8+20\omega+3\omega^2)x+22\omega+9\omega^2$; alors cette fraction devient

$$\frac{(8+20\omega+3\omega^2)x+22\omega+9\omega^2}{16(8-12\omega+9\omega^2)}=\frac{x}{16}\left(1+4\omega+\frac{21}{4}\omega^2\right)+\frac{11\omega+21\omega^2}{64};$$

donc le facteur $(1+2x+2x^2)^3$ donne les fractions partielles

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{x}{(1+2x+2x^2)^3}+\frac{11+16x}{64(1+2x+2x^2)^2}+\frac{21+21x}{64(1+2x+2x^2)}.$$

L'autre facteur donnera pareillement, en changeant le signe de x,

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{x}{(1-2x+2x^2)^3}+\frac{11-16x}{64(1-2x+2x^2}+\frac{21-21x}{64(1-2x+2x^2)};$$

et ces six fractions équivaudront à la fraction proposée $\frac{1}{(1+4x^4)^3}$.

Remarque. Si, après avoir décomposé la fraction $\frac{1}{(1+4x^4)^3}$, dont le numérateur est 1, on proposait une fraction semblable $\frac{1+8x^6}{(1+4x^4)^3}$, dont le numérateur fût à volonté ; on pourrait, sans recommencer le calcul, multiplier les parties trouvées par la valeur du numérateur. Ainsi, on trouverait pour $1+8x^6$ l'expression

$$1-5\omega+3\omega^2+(2-4\omega-6\omega^2)x,$$

par laquelle multipliant ce que nous avons déjà trouvé

$$\frac{x}{16}\left(1+4\omega+\frac{21}{4}\omega^2\right)+\frac{11\omega+21\omega^2}{64},$$

le produit serait

$$\frac{(9\omega+9\omega^2)x-2+9\omega+9\omega^2}{32};$$

donc la fraction proposée $\frac{1+8x^6}{(1+5x^4)^3}$ équivaut à la somme de celles-ci

$$-\frac{2}{32(1+2x+2x^2)^3}+\frac{9(1+x)}{32(1+2x+2x^2)^2}+\frac{9(1+x)}{32(1+2x+2x^2)}$$

$$-\frac{2}{32(1-2x+2x^2)^3}+\frac{9(1-x)}{32(1-2x+2x^2)^2}+\frac{9(1-x)}{32(1-2x+2x^2)}. \ (*)$$

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Sur une nouvelle classe de problèmes indéterminés, avec application à la décomposition des fractions;

Par M. GERGONNE.

LES seuls problèmes indéterminés qu'on se soit proposés et qu'on ait cherché à résoudre jusqu'ici, sont ceux où, étant données des équations numériques, en moindre nombre que les inconnues x, y, z,..... qu'elles renferment, il s'agit de satisfaire à ces équa-

---

(*) On trouve, à la page 279 du III.e volume de ce recueil, un mémoire sur le même sujet, par M. de Stainville qui l'a reproduit, avec quelques modifications, à la page 556 de ses *Mélanges d'analise et de géométrie.* (In-8.°, Paris, veuve Courcier, 1815.)

J. D. G.

tions, par des valeurs des inconnues qui soient entières, si les équations ne passent pas le premier degré, ou tout au moins rationnelles, si elles sont de degrés plus elevés.

Mais l'analise indéterminée peut être envisagée d'une manière beaucoup plus générale. Au lieu de supposer, en effet, que les données qui entrent dans les équations qu'il s'agit de résoudre sont de simples quantités numériques, on peut supposer que ce sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables t, u, v,.:...; et au lieu de demander de satisfaire à ces équations par des valeurs numériques entières ou rationnelles de x, y, z,......., on peut se proposer de les résoudre par des valeurs de ces inconnues fonctions entières ou tout au moins rationnelles des mêmes variables t, u, v,.....

Qu'on ait, par exemple, entre les trois inconnues x, y, z, les deux équations

$$(1+2t+2t^2)x+(2+t-2t^2)y+(2-2t+t^2)z=13+2t+4t^2+t^3+19t^4,$$

$$(3-t+2t^2)x+(2+3t-t^2)y+(1+3t-2t^2)z=22-3t+9t^2-26t^3+24t^4,$$

si l'on demande quelles sont les valeurs les plus générales de x, y, z, fonctions entières de t qui y satisfassent, on trouvera

$$x=5-3t+7t^2-(2-5t-3t^2+13t^3-5t^4)T,$$

$$y=3+2t-4t^2+(5-13t+3t^2-7t^3+6t^4)T,$$

$$z=1-5t-3t^2-(4-6t-12t^2+0t^3-2t^4)T;$$

où T désigne une fonction entière de t tout-à-fait arbitraire. On doit remarquer, au surplus, qu'ici les coefficiens numériques peuvent être fractionnaires, sans que les fonctions cessent pour cela d'être réputées entières. Une fonction entière des variables t, u, v,..... est simplement, en effet, une fonction où ces variables n'entrent point au dénominateur.

Soit encore, entre les deux inconnues x, y, l'équation

$$(1-3t+5t^2)x^2+(5+2t-8t^2)y^2=29+69t+218t^2-182t^3-180t^4;$$

et supposons qu'on demande d'y satisfaire de la manière la plus générale par des valeurs de x, y fonctions rationnelles de t; on trouvera pour ces valeurs

$$x=\frac{-(3-11t+21t^2-10t^3)-2(10+29t-6t^2-40t^3)T+(15-4t-28t^2+16t^3)T^2}{(1-3t+5t^2)+(5+2t-8t^2)T^2},$$

$$y=\frac{+(2-t-5t^2+25t^3)-2(3-11t+21t^2-10t^3)T-(10+29t-6t^2-40t^3)T^2}{(1-3t+5t^2)+(5+2t-8t^2)T^2},$$

où T représente encore une fonction rationnelle de t tout-à-fait arbitraire. Ici les coefficiens numériques pourraient être radicaux, sans que pour cela les fonctions cessassent d'être réputées rationnelles; une fonction rationnelle des variables t, u, v,...... étant simplement une fonction qui ne renferme pas ces variables sous des radicaux.

Nous ne nous occuperons uniquement, dans ce qui va suivre, que de la résolution des équations du premier degré à deux inconnues, et même dans le seul cas où les données et les inconnues sont et doivent être simplement fonctions d'une seule variable t. Nous ferons voir ensuite que le problème de la décomposition des fractions n'est qu'un cas particulier de celui qui nous aura occupés.

Soit proposée l'équation

$$ax+by=c,$$

dans laquelle a, b, c sont supposés des nombres entiers, et à laquelle on se propose de satisfaire par des valeurs entières de x, y; il est connu, 1.° que le problème n'est possible qu'autant que le plus grand commun diviseur de a et b se trouve être diviseur de c; 2.° que le problème se résout immédiatement lorsque le

plus petit des coefficiens a, b est l'unité; 3.° enfin, que par des transformations plus ou moins nombreuses, on ramène facilement à ce cas celui où ce plus petit coefficient est différent de l'unité.

Ainsi, si l'équation proposée est

$$7x+y=23\,,$$

on aura, de suite,

$$y=23-7x\,;$$

et en prenant pour x un nombre entier quelconque, on aura aussi un nombre entier pour la valeur correspondante de y.

Si, au contraire, l'équation à résoudre est

$$211x+91y=695\,;$$

on l'écrira d'abord ainsi

$$91(2x+y-7)+29x=58\,.$$

posant

$$2x+y-7=p\,,$$

elle deviendra

$$91p+29x=58\,;$$

qu'on pourra écrire ainsi

$$29(3p+x-2)+4p=0\,;$$

posant encore

$$3p+x-2=q.$$

elle deviendra

$$29q+4p=0\,;$$

ou

$$4(7q+p)+q=0\,;$$

posant enfin

$$7q+p=n\ ,$$

nous aurons

$$4n+q=0\ ,$$

d'où, en remontant,

$$q=-4n\ ,$$

$$p=+29n\ ;$$

$$x=2-91n\ ,$$

$$y=3+211n\ .$$

Voilà donc des valeurs entières de x, y fonctions d'un nombre entier n tout-à-fait arbitraire.

Les équations indéterminées dans lesquelles les données et les inconnues sont et doivent être des fonctions entières d'une variable t, se traitent à peu près de la même manière. Soit en effet, en général, entre x et y, une équation de la forme

$$(a+a't+a''t^2+\ldots.)x+(b+b't+b''t^2+\ldots.)y=(c+c't+c''t^2+\ldots.)\ ;$$

dans laquelle a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', ... sont supposés des nombres donnés quelconques, et à laquelle il faille satisfaire par des valeurs de x et y fonctions entières de t; il est facile de voir, 1.° que le problème ne sera possible qu'autant que le plus grand commun diviseur des coefficiens de x et y sera en même temps diviseur de la fonction de t qui forme le second membre; 2.° que l'equation sera immédiatement résoluble, si l'un des coefficiens est une quantité purement numérique; 3.° enfin que, par des transformations plus ou moins nombreuses, on pourra toujours ramener à ce cas celui où les deux coefficiens seront l'un et l'autre des fonctions de t.

Soit, en premier lieu, l'équation

$$(2-5t+4t^2)x+7y=13-5t-13t^2-t^3\ ;$$

elle donnera immédiatement

$$y=\frac{13-5t-13t^2-t^3-(2-5t+4t^2)x}{7},$$

formule où, en prenant pour x une fonction entière tout-à-fait arbitraire de t, on aura aussi pour y une fonction entière de t.

Soit, en second lieu, l'équation

$$(1-2t-3t^2+5t^3)x+(2-7t+3t^2)y=5-5t-43t^2+57t^3-19t^4\ ;$$

en la multipliant par 9, quarré du coefficient 3 de la plus haute puissance de t dans le coefficient le moins élevé, on pourra la mettre sous cette forme

$$(2-7t+3t^2)\{(26+15t)x+9y-(38t-57t^2)\}-(43-134t)x$$
$$=45-121t=7t^2\ ;$$

en posant

$$(26+15t)x+9y-19(2t-3t^2)=p\ ,$$

elle deviendra

$$(2-7t+3t^2)p-(43-134t)x=45-121t-7t^2\ .$$

Multipliant celle-ci par 17956, quarré du coefficient 134 de la plus haute puissance de t, dans le coefficient le moins élevé, on pourra ensuite la mettre sous cette forme

$$(43-134t)\{(809-402t)p-17656x-(16515+938t)\}+1125p=97875\ ;$$

posant ensuite

(809

$$(809-402t)p-17656x-(16515+938t)=T.$$

elle deviendra

$$(43-134t)T+1125p=97875;$$

et de là, en remontant,

$$p=\frac{97875-(43-134t)T}{1125}$$

$$x=\frac{1125(3-2t)-(2-7t+3t^2)T}{1125}$$

$$y=\frac{1125(1+5t-3t^2)+(1-2t-3t^2+5t^3)T}{1125}$$

voilà donc des valeurs de x, y qui, en prenant pour T une fonction entière quelconque de t, seront aussi des fonctions entières de cette variable; en y changeant T en $1125\,T$, ce qui est permis; elles deviennent

$$x=(3-2t)-(2-7t+3t^2)T,$$

$$y=(1+5t-3t^2)+(1-2t-3t^2+5t^3)T;$$

où T est toujours une fonotion entière quelconque de t.

Venons présentement aux applications que nous avons annencées. Soit d'abord la fraction numérique $\frac{89}{125}$ qu'il faille décomposer en deux autres dont les dénominateurs soient respectivement 125 et 25^2. En désignant les numérateurs par x et y, on aura

$$\frac{89}{125}=\frac{x}{125}+\frac{y}{25},$$

ou

$$x+5y=89;$$

d'où

$$x=89-5y,$$

où l'on peut donner à y une valeur entière quelconque.

Si l'on veut que x soit plus petit que 5, racine du dominateur, il faudra prendre $y=17$ et l'on aura ainsi

$$\frac{89}{125}=\frac{4}{125}+\frac{17}{25}.$$

Par une semblable méthode, on décomposerait ultérieurement $\frac{17}{25}$ en deux autres fractions dont les numérateurs seraient l'un et l'autre moindres que 5. On trouverait ainsi

$$\frac{89}{125}=\frac{4}{125}+\frac{2}{25}+\frac{3}{5}.$$

Ainsi, en général, toute fraction numérique $\frac{b}{a^m}$ peut être considérée comme la somme *algébrique* d'une suite d'autres

$$\frac{b'}{a^m}+\frac{b''}{a^{m-1}}+\frac{b'''}{a^{m-2}}+\dots,$$

dans lesquelles les numérateurs b', b'', b''',.... sont tous moindres que a.

Soit, en second lieu, la fraction $\frac{379}{600}$ à décomposer en deux autres dont les dénominateurs soient les deux facteurs premiers entre eux 24 et 25 de son dénominateur? En désignant par x, y les numérateurs respectifs de ces deux fractions, on aura

$$\frac{379}{600}=\frac{x}{24}+\frac{y}{25};$$

d'où

$$25x+24y=379;$$

cela donne

$$x=19-24n, \quad y=25n-4.$$

Si l'on veut que les numérateurs soient plus petits que les dénominateurs, on pourra prendre $n=0$; cela donnera

$$\frac{379}{600}=\frac{19}{24}-\frac{4}{25}.$$

On pourrait, par le même procédé, décomposer ultérieurement $\frac{19}{24}$ en deux fractions ayant 3 et 8 pour dénominateurs; et des numérateurs plus petits que ces nombres. On trouverait ainsi

$$\frac{179}{600}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{4}{25},$$

et nous venons de voir tout-à-l'heure comment se décomposaient les fractions de la dernière sorte.

Si, en général, on a la fraction numérique $\frac{k}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots}$, dans laquelle les nombres a, b, c, ... soient premiers entre eux, on pourra la décomposer en

$$\frac{a'}{a^\alpha}+\frac{b'}{b^\beta}+\frac{c'}{c^\gamma}+\ldots.$$

dans laquelle les numérateurs seront moindres que les dénominateurs.

Cette application de l'analise indéterminée ordinaire a déjà été indiquée par M. Legendre (*Théorie des nombres*, dernière édition, pag. 26). La décomposition des fractions littérales, fonctions d'une variable, est une application toute semblable de la nouvelle analise indéterminée dont il vient d'être question ci-dessus.

Soit, en premier lieu, la fraction

$$\frac{4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5}{(1+5t-2t^2)^3}$$

qu'il faille décomposer en deux autres dont les dénominateurs soient $(1+5t-2t^2)^3$ et $(1+5t-2t^2)^2$; en désignant les numérateurs par x, y, on aura

$$\frac{x}{(1+5t-2t^2)^3}+\frac{y}{(1+5t-2t^2)^2}=\frac{4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5}{(1+5t-2t^2)^3},$$

ou

$$x+(1+5t-2t^2)y=4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5\ ;$$

en résolvant cette équation comme ci-dessus, on trouve

$$x=(3-2t)+(1+5t-2t^2)T\ ,$$
$$y=(1-2t+t^2-7t^3)-T.$$

Si l'on veut que x soit d'un degré inférieur au second, et y d'un

degré inférieur au quatrième, il ne s'agira que de faire $T=0$; ce qui donnera

$$\frac{4+t-5t^2+38t^3-19t^4+2t^5}{(1+5t-2t^2)^3}=\frac{3-2t}{(1+5t-2t^2)^3}+\frac{1-2t+7t^2-t^3}{(1+7t-2t^2)^2}.$$

On décomposerait, par un semblable procédé, la dernière fraction en deux autres, ayant pour dénominateurs $(1+5t-2t^2)^2$ et $1+5t-2t^2$, et des numérateurs du premier degré au plus.

Soit, en second lieu, la fraction

$$\frac{10-87t+25t^2-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6}{(2-3t)^3(1-2t+5t^2)^2},$$

qu'il faille décomposer en deux autres, ayant pour dénominateurs $(2-3t)^3$ et $(1-2t+5t^2)^2$; en appelant x et y leurs numérateurs, nous aurons

$$\frac{x}{(2-3t)^3}+\frac{y}{(1-2t+5t^2)^2}$$

$$=\frac{10-87t+257^2t-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6}{(2-3t)^3(1-2t+5t^2)^2};$$

ou bien

$$(1-2t+5t^2)^2x+(2-3t)^3y$$

$$=10-87t+257t^2-295t^3+87t^4+53t^5-52t^6;$$

cela donne

$$x=(2-3t-t^2)+(2-3t)^3T,$$

$$y=(1-5t-2t^2+t^3)-(1-2t+5t^2)^2T.$$

Si l'on veut que les numérateurs soient d'un moindre degré que les dénominateurs, il suffira de poser $T=0$, et l'on aura

$$\frac{2-3t-t^2}{(2-3t)^3}+\frac{1-5t-2t^2+t^3}{(1-2t+5t^2)^2}$$

$$=\frac{10-87t+257t^2-295t^3+87^4+53t^5-52t^6}{(2-3t)^3(1-2t+5t^2)^2}.$$

Nous sommes loin de prétendre, au surplus, que cette méthode soit préférable aux autres méthodes connues, et notamment à celle qui se trouve indiquée dans le précédent mémoire ; et nous avons eu simplement l'intention de faire voir comment le problème de la décomposition des fractions littérales se rattache à la nouvelle branche d'analise indéterminée que nous avons signalée.

ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

Sur les élections et le système représentatif;

Par M. GERGONNE.



Au commencement du VI.e volume de ce recueil, j'ai présenté, sur les élections et les assemblées délibérantes, des réflexions tendant à signaler un très-grave défaut du système représentatif, lequel consiste en ce que, dans le cas même des élections directes, et en admettant que chaque député est religieusement fidèle à l'opinion de ceux qui l'ont élu, il peut très-bien se faire que le vœu de la majorité de la chambre représentative soit formellement contraire je ne dis pas seulement à celui de la nation, mais même à celui de la très-grande majorité des citoyens qui ont concouru à leur élection. J'ai montré que ce danger devenait beaucoup plus grave et plus imminent encore lorsque les élections, au lieu d'être directes, étaient faites par des électeurs, élus eux-mêmes par un plus grand nombre de citoyens ; et je n'ai pas dû être peu surpris, en voyant que, dans la discussion solennelle qui précéda, il y a trois ans, l'adoption de la loi des élections, aucun des adversaires des élections à plusieurs degrés n'avait songé à faire valoir contre elles un argument à la fois si palpable et si péremptoire.

J'avais cru, jusqu'à ces derniers temps, que l'inconvénient dont il vient d'être question était tellement inhérent à la forme de nos

gouvernemens modernes, qu'il était absolument impossible de les en délivrer, et j'avouerai même que cette pensée avait singulièrement attiédi mon affection pour le système représentatif. La lecture d'un petit écrit sur ce sujet, publié récemment par M. Flaugergues, m'a tout-à-fait désillé les yeux; et quoique je sois fort loin d'adopter la plupart des idées de l'auteur, j'ai pourtant puisé dans son ouvrage une ressource qui me semble tout-à-fait propre à remédier à un mal qui d'abord m'avait paru absolument irremédiable.

C'est une très-excellente chose sans doute que la liberté; mais la justice est peut-être une chose plus excellente encore; et c'est précisément parce que cette liberté est un bien précieux, qu'il ne faut pas que la jouissance en soit exclusivement réservée à une classe quelconque de citoyens. Qu'on nous vante tant qu'on voudra les républiques de Sparte, d'Athènes et de Rome. Je n'aime pas moi cette liberté du petit nombre qui est fondée sur l'esclavage de tout le reste. S'il ne s'agissait que d'aimer passionnément la liberté pour être digne d'estime, je ne connaîtrais personne qui méritât mieux nos hommages que le dey d'Alger, le roi de Perse et l'empereur de Constantinople, tous gens si jaloux de leur liberté qu'on paye chez eux de sa tête la seule pensée d'y mettre la plus légère entrave.

Or, comme l'observe fort bien M. Flaugergues, dans le système électoral en usage depuis trois ans, tous les contribuables au-dessous de 300 fr., c'est-à-dire, environ les *quarante-quatre quarante-cinquièmes* des citoyens ayant un état, un domicile et même quelques propriétés, se trouvent, *de droit*, exclus de toute influence sur la nomination des députés qui doivent discuter leurs intérêts; et cette même influence se trouve enlevée *de fait* aux contribuables au-dessus de 5 à 600 fr., toujours en minorité dans nos colléges électoraux, et qui, lassés de n'y paraître que pour sanctionner par leur présence des choix que souvent ils réprouvent, finiraient bientôt par s'en exclure volontairement, si l'on n'apportait quelque chan-

gement dans leur situation. L'élection de la totalité des députés de la France se trouve donc livrée à la discrétion d'environ *soixante mille* petits marchands ou petits propriétaires, sans éducation, sans dignité personnelle, et totalement dépourvus, pour la plupart, de toute vue politique un peu élevée et lointaine.

C'est à ce vice radical de notre système électoral que M. Flaugergues se propose d'indiquer un remède. Celui qu'il choisit consiste à remplacer le collége électoral unique de chaque département par plusieurs autres, dont chacun élirait un certain nombre de députés, et d'organiser ces colléges de telle sorte que l'on soit à peu près certain que les choix y seront faits à l'unanimité. Homogénéité d'intérêts parmi les électeurs d'un même collége : diversité d'intérêts parmi les députés élus; tel est en peu de mots le principe de M. Flaugergues. Ce principe est très-bon sans doute; mais voyons comment l'auteur prétend l'appliquer.

M. Flaugergues, considérant le rôle des contributions comme le tarif présumé des opinions politiques des diverses classes de citoyens, crée, dans chaque département, trois colléges respectivement formés des grands, moyens et petits propriétaires; mais croit-il de bonne-foi que, dans de tels colléges, les choix soient toujours faits, je ne dis pas à l'unanimité, mais même à une grande majorité? Manque-t-il en France de porte-faix qui se piquent de penser comme des marquis? et, à l'inverse, dans le cours de notre révolution, n'a-t-on pas vu plus d'un grand seigneur s'attacher au char des Chabot et des Marat? On ne saurait disconvenir néanmoins de l'extrême droiture de l'intention première de M. Flaugergues. Voyons donc s'il ne serait pas possible d'en tirer un parti plus heureux.

Je comparerais volontiers des ministres, en présence d'une chambre de députés des départemens, à un général qui, la veille d'une opération militaire, examine avec soin la carte topographique du terrain sur lequel il doit manœuvrer; et, pour suivre le parallèle jusqu'au bout, je comparerais les soins que se donnent ces ministres pour

influencer les élections, à ceux que prendrait le même général pour se procurer des cartes inexactes, sur lesquelles les distances seraient abrégées, les montagnes abaissées et les sentiers élargis. Je crois donc que, plus encore dans l'intérêt du gouvernement que dans celui des gouvernés, c'est une condition de rigueur que la chambre dite des représentans soit, en effet, une représentation autant fidèle que possible de la nation pour laquelle elle doit consentir des lois; qu'elle en soit, s'il est permis de s'exprimer ainsi, une sorte de miniature; et que les ministres se trouvent là, à peu près, comme dans le forum des petites républiques de l'antiquité.

Si donc il existe encore au milieu de nous des hommes assez fous pour ne rêver que dîmes, intolérance, châteaux et justices seigneuriales; s'il en est d'assez niais pour aspirer à donner un gouvernement républicain, c'est-à-dire, un gouvernement tout d'abnégation et de sacrifices, à de vieux égoïstes, à de vieux sybarites comme nous; s'il en est pour qui des fers dorés, tous couverts de lauriers, puissent encore avoir quelque charme; s'il en est enfin qui, par une antipathie aveugle et obstinée contre la dynastie régnante, lui préféreraient tout gouvernement quelconque autre que le sien; il faut que le ministère le sache; il faut qu'il connaisse exactement, ou du moins à très-peu près, dans quelle proportion sont ces diverses classes d'individus, tant entre elles qu'avec la masse de la nation, qui ne demande que l'entière conservation de ce qui existe; il faut, en un mot, pour que ces gens-là ne songent pas à conspirer dans l'ombre, pour qu'ils puissent rougir eux-mêmes de l'infériorité de leur nombre, il faut, dis-je, qu'ils aient des organes dans la chambre représentative; il faut aussi qu'ils puissent élire leurs représentans.

Mais, dira-t-on, ne se pourrait-il pas que la majorité de la nation fût infatuée de doctrines subversives de l'ordre social? et alors quelle chambre de députés pourrait-on en attendre, si les élections n'étaient pas habilement maîtrisées et dirigées? A cela, je réponds que d'abord ceux qui feraient cette objection, calom-

nieuse

nieuse pour la nation, n'y croiraient pas eux-mêmes sérieusement. J'observe, en second lieu, que, si réellement telle était notre position, je n'y verrais que deux remèdes l'un : ou bien se résigner à partir de la nation telle qu'elle serait pour l'amener par degrés insensibles à ce qu'on désirerait qu'elle devînt : ou bien briser violemment sa volonté, en l'assujettissant à un joug de fer; et, dans ce cas, je ne verrais rien de mieux que de rappeler le prisonnier de Ste-Hélène.

Je persiste donc à croire que la chambre élective ne saurait offrir une représentation trop fidèle des sentimens et opinions diverses qui partagent la nation; cette condition, qui serait de rigueur dans une démocratie pure, où la chambre des représentans ferait seule les lois, ne peut avoir d'ailleurs un grave danger chez nous, où cette chambre n'a, en dernière analise, qu'un simple droit de veto.

Si j'étais partisan du système qui consiste à distinguer dans la Charte des articles fondamentaux et des articles réglémentaires; je serais fort tenté de ranger, au nombre de ces derniers, les dispositions qui fixent la cote de contribution nécessaire pour être électeur ou éligible; je penserais que, sur-tout à la suite d'une longue révolution, où il a été si facile aux gens peu scrupuleux de faire de très-gros gains, on pourrait peut-être trouver une garantie plus sure du discernement et de l'indépendance des uns et des lumières de la droiture des autres, que la somme qu'ils payent annuellement au fisc; je penserais en un mot, qu'il est peut-être bien temps enfin que *l'argent redescende à sa valeur, et que l'honneur remonte à la sienne*; mais, attendu que les argumens du Moniteur de cette année n'ont pu encore complètement détruire dans mon esprit l'impression qu'y avaient produite ceux du Moniteur de 1817; je veux, dans mon utopie, respecter en tous points tous les articles de la Charte, sans distinction, du moins ceux d'entre eux qui présentent un sens bien précis; car pour ce qui concerne le nombre des membres de la chambre, je pense, avec beaucoup d'hommes d'état, que les dispositions de la Charte ne sont ni assez précises ni assez impératives

qu'on ne puisse les interpréter d'une manière un peu plus large qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Ces choses ainsi posées, je renferme mon projet de loi électorale dans les deux seuls articles que voici :

I. *Sera électeur d'un département, tout citoyen qui, y ayant son domicile de fait depuis plus d'un an, payera trois cens francs de contributions directes, depuis le même temps.*

II. *Sera, pour cinq années, député d'un département à la chambre élective, tout citoyen qui, ayant son domicile de droit dans ce département depuis plus d'un an, et payant au moins mille francs de contributions directes, depuis le même temps, sera porteur d'un mandat de deux cens électeurs au moins, du même département, lui conférant ce titre, et ne l'ayant conféré à aucun autre depuis les précédentes élections.*

On voit que, dans ce système, qui porterait probablement le nombre des députés à environ *cinq cens*, les assemblées électorales et les pénibles déplacemens qu'elles nécessitent, et qui ne découragent que trop souvent les électeurs, seraient tout-à-fait inutiles. A l'époque des élections, ceux-ci se grouperaint spontanément, suivant la nature de leurs opinions, de leurs intérêts ou de leurs vœux. Et il n'y aurait, au plus, que ceux qui ne trouveraient pas à se réunir chez eux en nombre suffisant, et ne voudraient pas voter avec leur entourage, qui seraient obligés de se transporter ailleurs, pour émettre un vœu utile.

Il faudrait, sans doute, prendre des mesures sévères tant pour constater les titres des électeurs et des éligibles, que pour s'assurer de l'authenticité des signatures et se garantir des votes multiples des mêmes électeurs; mais tout cela serait l'affaire d'un réglement d'administration facile à rédiger.

En adoptant ce système, chaque député se trouverait le véritable représentant de la totalité de ses commettans, et le vote de la majorité de la chambre serait toujours l'expression fidèle si non de l'opinion de la majorité des Français, du moins de la majorité de ceux d'entre eux qui ont le droit d'élire.

Je ne fais ici, au surplus, que régulariser le système des scissions, fort en vogue sous le directoire; avec cette différence que chaque fraction du collége électoral exerce ici un droit effectif, proportionné à sa masse; tandis qu'au temps du directoire, chaque fraction prétendait faire à elle seule les députés de tout le département; et que ce n'était pas toujours la fraction la plus nombreuse dont les choix étaient préférés.

Un des grands avantages de ce système, c'est qu'il peut se prêter à tant de degrés d'élection qu'on voudra introduire, sans offrir aucun des inconvéniens que j'ai signalés dans l'article cité. Si, par exemple, on voulait faire concourir aux élections tous les citoyens payant cinquante francs au moins de contributions, il suffirait de statuer que vingt de ceux-ci pourront, par un mandat signé d'eux, et délivré à un citoyen payant trois cens francs au moins de contributions directes, le constituer électeur. Dans ce cas, comme dans l'autre, l'esprit général de la majorité de la chambre serait exactement conforme à celui de la majorité des citoyens qui auraient concouru aux élections.

Je pense, par ce qui précède, avoir plus surement résolu que M. Flaugergues lui-même le problème que cet estimable écrivain s'était proposé; savoir, d'obtenir l'identité d'intérêts chez ceux qui élisent et la diversité d'intérêts chez ceux qui sont élus. Si le système que je propose pouvait essuyer des contradictions et des critiques, ce ne pourrait guère être qu'au sein des ces majorités de toutes les couleurs qui, dans les diverses phases de notre révolution et sur les divers points de la France, ont tour-à-tour essayé de soumettre les minorités à leur joug despotique; mais je leur répéterai encore ce que j'ai déjà dit plus haut, que, pour mériter d'être libre, il faut d'abord consentir à être juste.

Au surplus, persuadé comme je le suis, que dans notre situation actuelle, nos institutions ont beaucoup plus besoin encore de fixité que de perfection, je renoncerais très-volontiers à mes idées, si l'on voulait nous conserver un système électoral qui, avec toutes

ses imperfections, était peut-être encore le moins mauvais de tous ceux qu'on nous avait donnés jusqu'ici.

Par les mêmes considérations, je tiens extrêmement au renouvellement partiel de la chambre, parce que je pense que, dans le jeu des gouvernemens, comme dans celui des machines, tout changement brusque ne peut être produit sans consommer des forces en pure perte ; et que le monde moral doit, autant que possible, comme le monde physique, être assujetti à la loi de continuité.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes d'optique.

I. On demande quelle est la courbe, image d'une ligne droite vue à travers un prisme de cristal disposé d'une manière quelconque par rapport à cette droite, en faisant d'ailleurs abstraction de la dispersion ?

II. On demande quelle est la courbe, image d'une ligne droite entièrement plongée dans l'eau, et vue hors de l'eau ?

GÉOMÉTRIE MIXTE.

Solution nouvelle du problème où il s'agit d'inscrire à un triangle donné quelconque trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle;

Par M. LECHMÜTZ, docteur en philosophie à Berlin.

Au Rédacteur des Annales.

MONSIEUR,

EN donnant, dans votre estimable recueil (*), l'historique du curieux problème dont je vais avoir l'honneur de vous entretenir, et en faisant connaître la solution extrêmement simple qui en a été donnée par un célèbre géomètre italien; vous avez témoigné le regret qu'on en fût réduit à justifier *à posteriori* la formule finale de Malfatti, en prouvant qu'elle satisfait aux équations qu'il s'agit de résoudre; sans qu'on aperçoive comment, à l'aide de ces seules équations, on pourrait parvenir à cette même formule, si elle était inconnue, ou du moins à toute autre équivalente et d'une facile construction.

(*) Voyez tom. I, pag. 343; tom. II, pag. 60 et 165.

Cette considération m'ayant déterminé à revenir de nouveau et tout récemment sur ce singulier problème ; j'ai été assez heureux pour en obtenir une solution que sa simplicité et son élégance vous feront peut-être juger de nature à ne point déparer votre recueil ; et qu'en conséquence je vais exposer brièvement.

Soient A, B, C les trois sommets d'un triangle quelconque ; soit O le centre du cercle inscrit, dont nous prenons le rayon pour unité. De ce centre, soient abaissées respectivement, sur les côtés BC, CA, AB, les perpendiculaires $OA'=OB'=OC'=1$; et soient de plus menées du même point aux sommets les droites OA, OB, OC.

Soient faits

$$Ang.AOB'=Ang.AOC'=\alpha ,$$

$$Ang.BOC'=Ang.BOA'=\beta ,$$

$$Ang.COA'=Ang.COB'=\gamma ;$$

nous aurons

$$AB'=AC'=\text{Tang}.\alpha , \qquad OA=\text{Sec}.\alpha ,$$

$$BC'=BA'=\text{Tang}.\beta , \qquad OB=\text{Sec}.\beta ,$$

$$CA'=CB'=\text{Tang}.\gamma ; \qquad OC=\text{Sec}.\gamma .$$

Nous aurons de plus, parce que $2\alpha+2\beta+2\gamma$ vaut quatre angles droits,

$$\text{Tang}.\gamma=-\text{Tang}.(\alpha+\beta)=-\frac{\text{Tang}.\alpha+\text{Tang}.\beta}{1-\text{Tang}.\alpha\text{Tang}.\beta} ;$$

ou bien, en chassant le dénominateur et transposant,

$$\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta+\text{Tang.}\gamma=\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\beta\text{Tang.}\gamma \ .$$

Il s'agit donc d'inscrire à ce triangle trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle ; et il est d'abord clair que les centres de ces cercles devront être situés sur les droites OA, OB, OC qui divisent ces angles en deux parties égales. Soient respectivement X, Y, Z, ces centres, et x, y, z; les rayons qui leur correspondent.

Si l'on projette orthogonalement les centres X, Y sur le côté $AB=AC'+BC'=\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta$, leurs projections diviseront ce côté en trois segmens dont les extrêmes seront évidemment $x\text{Tang.}\alpha$, $y\text{Tang.}\beta$. Quant au segment intermédiaire, il ne sera autre chose que la projection de la distance des centres $XY=x+y$, et sera conséquemment

$$\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}=\sqrt{4xy}=2\sqrt{xy} \ ;$$

égalant donc la somme de ces trois parties à la première expression du côté AB, on aura

$$x\text{Tang.}\alpha+2\sqrt{xy}+y\text{Tang.}\beta=\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\beta \ .$$

La considération des deux autres côtés donnera des équations analogues, de sorte qu'en faisant, pour abréger,

$$\text{Tang.}\alpha=a \ ,$$

$$\text{Tang.}\beta=b \ ,$$

$$\text{Tang.}\gamma=c \ ;$$

tout se trouvera réduit à résoudre, par rapport à x, y, z, les trois équations

$$ax+2\sqrt{xy}+by=a+b\,, \qquad (1)$$

$$by+2\sqrt{yz}+cz=b+c\,; \qquad (2)$$

$$cz+2\sqrt{zx}+ax=c+a\,; \qquad (3)$$

avec la condition

$$a+b+c=abc\,: \qquad (4)$$

En multipliant en croix les équations (2, 3) et réduisant, on a

$$(b+c)(ax+2\sqrt{xz})-(a+c)(by+2\sqrt{yz})=c(a-b)z\,;$$

mais l'équation (4) donne

$$c=-\frac{a+b}{ab-1}\,,$$

d'où

$$b+c=\frac{a(1+b^2)}{ab-1}\,,\quad a+c=\frac{b(1+a^2)}{ab-1}\,;$$

substituant donc, et supprimant le dénominateur commun, on aura

$$a(1+b^2)(ax+2\sqrt{xz})-b(1+a^2)(by+2\sqrt{yz})=(a^2-b^2)z\,,$$

ou encore

$$a(1+b^2)(ax+2\sqrt{xy})-b(1+a^2)(by+2\sqrt{yz})=\{(1+a^2)-(1+b^2)\}z\,;$$

ou, en transposant,

$$(1+b^2)(a^2x+2a\sqrt{xz}+z)=(1+a^2)(b^2y+2b\sqrt{yz}+z)\,,$$

ou encore

$$(1+b^2)(a\sqrt{x}+\sqrt{z})^2=(1+a^2)(b\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\,;$$

ou, en extrayant les racines et divisant,

$$\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{b\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{1+b^2}} .$$

Nous ne donnons pas de double signe au second membre de cette équation, parce qu'ici nous n'avons simplement en vue que les cercles intérieurs au triangle, se touchant extérieurement.

Par une simple permutation de lettres, on conclura de là

$$\frac{b\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{c\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+c^2}} ; \quad \frac{c\sqrt{z}+\sqrt{y}}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{1+a^2}} ;$$

ajoutant ces deux dernières membre à membre, z disparaîtra, et il viendra

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right\}\sqrt{x}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right\}\sqrt{y} ;$$

mais, à cause de

$$c=\frac{a+b}{ab-1} ;$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{ab-1}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} ;$$

substituant donc, et chassant les dénominateurs, il viendra

$$\left\{1-ab+\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+b^2}\right\}\sqrt{x}=\left\{1-ab+\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}\right\}\sqrt{y} .$$

Les coefficiens des deux membres peuvent d'abord être écris ainsi

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})+a(1-b-\sqrt{1+b^2}) ,$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})+b(1-a-\sqrt{1+a^2}) ;$$

en considérant ensuite que

$$a=\tfrac{1}{2}.2a=-\tfrac{1}{2}\{(1-a)^2-(1+a^2)\}=-\tfrac{1}{2}(1-a+\sqrt{1+a^2})(1-a-\sqrt{1+a^2}),$$

$$b=\tfrac{1}{2}.2b=-\tfrac{1}{2}\{(1-b)^2-(1+b^2)\}=-\tfrac{1}{2}(1-b+\sqrt{1+b^2})(1-b-\sqrt{1+b^2}),$$

ils prendront cette nouvelle forme

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\{1-\tfrac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\};$$

$$(1-b+\sqrt{1+b^2})\{1-\tfrac{1}{2}(1-a-\sqrt{1+a^2})(1-b-\sqrt{1+b^2})\};$$

c'est-à-dire, qu'ils ont un facteur commun; en supprimant donc ce facteur, l'équation deviendra simplement

$$(1-a+\sqrt{1+a^2})\sqrt{x}=(1-b+\sqrt{1+b^2})\sqrt{y}.$$

En posant donc, pour abréger,

$$1-a+\sqrt{1+a^2}=A,$$

$$1-b+\sqrt{1+b^2}=B,$$

$$1-c+\sqrt{1+c^2}=C,$$

on tirera de là, par une simple permutation de lettres,

$$B\sqrt{y}=C\sqrt{z}, \qquad C\sqrt{z}=A\sqrt{x};$$

d'où

$$\sqrt{x}=\frac{C}{A}\sqrt{z}, \qquad \sqrt{y}=\frac{C}{B}\sqrt{z}. \qquad (5)$$

Retournons présentement à nos équations primitives; si de la somme des équations (2, 3) nous retranchons l'équation (1), en

supprimant le facteur 2, commun à tous les termes de l'équation résultante, elle deviendra

$$cz+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}-\sqrt{xy}=c\;;$$

mettant dans celle-ci pour $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ leurs valeurs (5), elle deviendra

$$\left(c+\frac{C}{A}+\frac{C}{B}-\frac{C^2}{AB}\right)z=c\;,$$

ou

$$\{cAB+C(A+B-C)\}z=cAB\;. \qquad (6)$$

Or, on a, d'après les valeurs de A, B, C

$$cAB=c(1-a)(1-b)+c(1-b)\sqrt{1+a^2}+c(1-a)\sqrt{1+b^2}+c\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\;;$$

ou bien, en remplaçant $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ par son égal $(ab-1)\sqrt{1+c^2}$

$$cAB=c(1-a)(1-b)+c(1-b)\sqrt{1+a^2}+c(1-a)\sqrt{1+b^2}+c(ab-1)\sqrt{1+c^2}\,.$$

On a ensuite

$$A+B-C=1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}\;;$$

d'où, en multipliant par $C=1-c+\sqrt{1+c^2}$, et remplaçant respectivement $\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}$ et $\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}$ par $(ac-1)\sqrt{1+b^2}$ et $(bc-1)\sqrt{1+a^2}$,

$$C(A+B-C)=-(1-c)(a+b)-2c^2-c(1-b)\sqrt{1+a^2}-(a+b-2c)\sqrt{1+c^2}$$
$$-c(1-a)\sqrt{1+b^2}$$

donc; en ajoutant et réduisant,

$$cAB+C(A+B-C)=c-a-b+abc-2c^2+(c-a-b+abc)\sqrt{1+c^2}\,.$$

En remplaçant abc par son équivalent $a+b+c$, cela deviendra

$$cAB+C(A+B-C)=2c(1-c+\sqrt{1+c^2})=2cC\;;$$

substituant donc cette valeur dans l'équation (6), et supprimant le facteur c, commun aux deux membres, elle deviendra simplement

$$2Cz=AB\;,$$

Par une simple permutation de lettres, on obtiendra les équations en x, y; de sorte qu'on a finalement

$$x=\frac{BC}{2A}\;,\qquad y=\frac{CA}{2B}\;,\qquad z=\frac{AB}{2C}\;.$$

Cela posé, soient prolongés AO, BO, CO, jusqu'à ce qu'ils rencontrent de nouveau la circonference du cercle inscrit en A″, B″, C″; puis des sommets A, B, C, pris respectivement pour centres, et avec les rayons AB′=AC′, BC′=BA′, CA′=CB′, soient décrits des arcs coupant respectivement AO, BO, CO en A‴, B‴, C‴; nous aurons ainsi

$$A''A'''=AO+OA''-AB'=OA''-AB'+AO=1-\text{Tang.}\alpha+\text{Sec.}\alpha=A$$

$$B''B'''=BO+OB''-BC'=OB''-BC'+BO=1-\text{Tang}\,\beta+\text{Sec.}\beta=B$$

$$C'C''=CO+OC''-CA'=OC''-CA'+CO=1-\text{Tang.}\gamma+\text{Sec.}\gamma=C$$

Les trois longueurs A, B, C étant ainsi déterminées, on en pourra conclure, par une construction unique, les trois rayons cherchés x, y, z. Pour cela, on construira un triangle DEF, dont les trois cotés EF, FD, DE, soient respectivement égaux à ces trois longueurs; par les sommets D, E, F, on menera des droites se terminant aux cotés opposés en D′, E′, F′, et tellement dirigées qu'on ait

Ang.

$$Ang.\mathrm{FDD'}=Ang.\mathrm{E}\ ;$$

$$Ang.\mathrm{DEE'}=Ang.\mathrm{F}\ ,$$

$$Ang.\mathrm{EFF'}=Ang.\mathrm{D}\ ;$$

alors, en vertu de la proportionnalité des côtés homologues des triangles semblables, les longueurs DD', EE', FF' seront les diamètres des cercles cherchés, ayant respectivement leurs centres en X, Y, Z.

Ces expressions des rayons des cercles une fois trouvées, rien de plus facile que de leur substituer telles autres inconnues qu'on voudra. En prenant, par exemple, pour inconnues les distances des sommets auxquelles les cercles cherchés touchent les côtés du triangle, ces inconnues seront $x\mathrm{Tang}.\alpha=ax$, $y\mathrm{Tang}.\beta=by$, $z\mathrm{Tang}.\gamma=cz$, et l'on aura

$$ax=\frac{aBC}{2A}\,,\qquad by=\frac{bCA}{2B}\,,\qquad cz=\frac{cAB}{2C}\,.$$

Or, d'après les valeurs trouvées ci-dessus pour cAB et $C(A+B-C)$, on a

$$cAB=C\{2c-(A+B-C)\}\ ;$$

donc

$$cz=\frac{cAB}{2C}=\tfrac{1}{2}\{2c-(A+B-C)\}\ ;$$

c'est-à-dire,

$$cz=\tfrac{1}{2}(a+b+c-1+\sqrt{1+c^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2})\ ,$$

ou encore

$$cz=\tfrac{1}{2}(\mathrm{AB'}+\mathrm{BC'}-\mathrm{CA'}-\mathrm{OC'}+\mathrm{OC}-\mathrm{OA}-\mathrm{OB})\ ;$$

ce qui revient exactement à la construction de Malfatti. (Voyez l'article cité, tom. I, pag. 347).

Si l'on voulait prendre pour inconnues les distances AX, BY, CZ des sommets aux centres correspondans, ces inconnues seraient respectivement $x\sqrt{1+a^2}$, $y\sqrt{1+b^2}$, $z\sqrt{1+c^2}$; et l'on trouverait, par exemple, d'après ce qui précède,

$$z\sqrt{1+c^2}=cz.\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}(a+b+c-1+\sqrt{1+c^2}-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}).$$

Si enfin on voulait prendre pour inconnues les distances OX, OY, OZ, ces inconnues seraient respectivement $(1-x)\sqrt{1+a^2}$, $(1-y)\sqrt{1+b^2}$, $(1-z)\sqrt{1+c^2}$; et l'on trouverait, par exemple,

$$(1-z)\sqrt{1+c^2}=(c-cz)\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}(1-a-b+c+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+c^2}).$$

En variant les signes des radicaux d'une manière convenable, et en substituant au cercle inscrit, proprement dit, chacun des trois autres cercles qui peuvent toucher à la fois les trois côtés du triangle, on obtiendra toutes les solutions dont le problème peut être susceptible (*).

Berlin, le 23 janvier 1820.

(*) La simplicité de cette solution engagera peut-être quelqu'un à tenter celle du problème analogue pour le tétraèdre, qui a été proposé à la page 287 du IIe volume de ce recueil.

J. D. G.

ANALISE APPLIQUÉE.

Problème général des engrenages à axes fixes;

Par M. Frédéric Sarrus.

Je me propose de montrer ici comment le problème des engrenages à axes fixes peut être facilement ramené aux procédés généraux de l'analise mathématique. Je pourrais aborder immédiatement le cas le plus général de ce problème; mais, pour en rendre la solution plus facile à saisir, je pense qu'il ne sera pas hors de propos de traiter d'abord un cas beaucoup plus simple: c'est celui où l'axe du pignon ou de la lanterne étant parallèle à celui de la roue, toutes les sections faites dans l'un et l'autre corps par des plans perpendiculaires à la direction commune de leurs axes sont des courbes égales, semblablement situées, et ayant pour points homologues les points où leurs plans sont rencontrés par leurs axes; c'est-à-dire, en d'autres termes, le cas où la roue et le pignon ou lanterne sont des surfaces cylindriques, ayant leurs élémens rectilignes parallèles à la direction commune de leurs axes. Tout se réduit alors, en effet, à remplir les conditions qui doivent être satisfaites, pour l'un quelconque des plans perpendiculaires aux axes; et on a alors à résoudre simplement un problème de géométrie plane qui peut être énoncé comme il suit:

PROBLÈME. Deux surfaces planes S, S', *situées dans un*

même plan, où elles doivent demeurer constamment, ne peuvent prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour de deux points fixes P, P′ *du plan où elles sont situées. La courbe qui termine la surface* S′ *étant donnée, on demande par quelle courbe doit être terminée la surface* S, *pour que, ces deux courbes, tournant librement autour de leurs centres de rotation respectifs, avec des vitesses données quelconques, constantes ou variables, les courbes qui les terminent se trouvent continuellement tangentes l'une à l'autre?*

Solution. De quelque manière que soient mus les différens corps d'un système, lorsqu'on n'a à s'occuper que de leur mouvement relatif, il est toujours permis de supposer l'un d'eux immobile, pourvu que l'on transporte aux autres son mouvement en sens contraire. On peut, en effet, imaginer tout le système renfermé dans un espace clos que l'on fait mouvoir dans l'espace indéfini, de telle sorte que le corps que l'on veut supposer immobile le soit en effet, dans ce dernier espace; d'où l'on voit qu'alors les autres corps du système, outre le mouvement qu'on avait d'abord attribué à chacun d'eux, auront encore un mouvement commun, égal à celui de l'espace clos, et par conséquent contraire au mouvement effectif du corps que l'on suppose immobile.

Pour appliquer ces considérations au problème qui nous occupe, supposons que la surface *S* soit immobile; il nous faudra, pour légitimer cette supposition, attribuer au point P′ un mouvement circulaire autour du point P; et alors notre problème se trouvera simplement réduit au suivant:

Pendant qu'une surface plane S′, *terminée par une courbe donnée, tourne sur un plan, autour de l'un quelconque* P′ *de ses points, avec une vitesse donnée quelconque, constante ou variable, le point* P′ *décrit, dans le même plan, une circonférence d'un rayon donné, ayant pour centre un autre point* P *de ce plan, avec une vitesse constante ou variable, également donnée et quelconque; on demande*

quelle est la courbe S *à laquelle, dans ce mouvement, la courbe* S′ *est continuellement tangente* ?

Or, le problème, ainsi envisagé, n'est qu'un cas particulier du problème des enveloppes planes, et peut être facilement résolu comme il suit.

Soit a la distance constante entre les deux points P, P′. Soit rapportée la courbe fixe cherchée S à des coordonnées rectangulaires x, y, fixes sur le plan des deux courbes, et dont, pour plus de simplicité, nous supposerons l'origine en P.

Soit rapportée la courbe mobile donnée S' à des coordonnées x, y, fixes sur cette courbe, mais mobiles avec elle sur le plan des deux surfaces, tant autour du point P′ qu'autour du point P; en prenant encore, pour plus de simplicité, le point P′ pour origine.

Soit, pour une époque quelconque, t l'angle variable que fait la droite mobile $PP'=a$ avec l'axe des x; les équations du point P′, par rapport au premier système de coordonnées, seront ainsi, pour la même époque,

$$x=a\operatorname{Cos}.t\,, \qquad y=a\operatorname{Sin}.t\,.$$

Si, dans la vue d'obtenir la courbe, lieu du point P′, dans toutes ses positions autour du point P, on élimine t entre ces deux équations, il viendra

$$x^2+y^2=a^2\,;$$

équation d'un cercle, comme on pouvait bien s'y attendre.

A la même époque, l'axe des x', qui varie sans cesse de position, fera, avec la droite mobile a, un angle fonction de l'angle t, dont la grandeur dépendra du rapport des vitesses de rotation des deux surfaces; nous représenterons cet angle par T; d'où l'on voit que l'angle des axes des x' et des x sera $T+t$.

Par les formules connues à l'aide desquelles on passe, sur un plan, d'un système rectangulaire à un autre système qui l'est également, on aura

$$x'=+(x-a\text{Cos}.t)\text{Cos}.(T+t)+(y-a\text{Sin}.t)\text{Sin}.(T+t)\ ,$$

$$y'=-(x-a\text{Cos}.t)\text{Sin}.(T+t)+(y-a\text{Sin}.t)\text{Cos}.(T+t)\ ;$$

ou, en développant et réduisant,

$$x'=+x\text{Cos}.(T+t)+y\text{Sin}.(T+t)-a\text{Cos}.T\ ,$$

$$y'=-x\text{Sin}.(T+t)+y\text{Cos}.(T+t)+a\text{Sin}.T\ .$$

Cela posé, soit

$$f'(x',y')=S'=0\ ,$$

l'équation de la courbe S', rapportée à ses propres axes, et que l'on suppose donnée, dans l'énoncé du problème, en y substituant pour x', y' les valeurs que nous venons de trouver en x, y, l'équation résultante, de la forme

$$f(x,y,t)=0\ ;$$

sera celle de cette même courbe S', dans toutes les positions qu'elle peut prendre par rapport à la courbe S ; ou, ce qui revient même, cette équation sera l'équation commune à une infinité de courbes, dont chacune sera une des positions de la courbe S' par rapport à la courbe S, et qu'on en déduirait en faisant varier la valeur du paramètre t. Puis donc que, dans toutes ces positions, la courbe S' doit continuellement être tangente à la courbe S, cette dernière ne sera autre chose que l'enveloppe de l'espace parcouru par la première. En conséquence, et d'après la théorie connue des enveloppes (*), si l'on élimine t entre cette dernière équation et

(*) Voyez, entre autres, la page 361 du III.e volume du présent recueil.

sa différentielle prise par rapport à ce paramètre, l'équation résultante, de la forme

$$f(x, y) = S = 0,$$

sera l'équation demandée de la courbe inconnue S. Venons présentement à quelques applications.

Supposons, en premier lieu, que la courbe donnée S' soit un cercle ayant le point P′ pour centre et un rayon égal à r; son équation, par rapport à ses propres axes, sera

$$x'^2 + y'^2 = r^2;$$

en y substituant pour x', y' leurs valeurs en x, y, elle deviendra

$$\left.\begin{matrix} x^2 - 2ax\{\text{Cos.}(T+t)\text{Cos.}T + \text{Sin.}(T+t)\text{Sin.}T\} \\ + y^2 - 2ay\{\text{Sin.}(T+t)\text{Cos.}T - \text{Cos.}(T+t)\text{Sin.}T\} \end{matrix}\right\} = r^2 - a^2;$$

ou, plus simplement,

$$x^2 + y^2 - 2ax\text{Cos.}t - 2ay\text{Sin.}t = r^2 - a^2;$$

équation qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$(x - a\text{Cos.}t)^2 + (y - a\text{Sin.}t)^2 = r^2;$$

Il ne s'agit donc plus présentement que d'éliminer t entre cette équation et sa différentielle, prise uniquement par rapport à cette lettre; or, cette différentielle est

$$(x - a\text{Cos.}t)\text{Sin.}t = (y - a\text{Sin.}t)\text{Cos.}t;$$

ou, plus simplement,

$$x\text{Sin.}t = y\text{Cos.}t\ ;$$

combinant cette équation avec $\text{Sin.}^2t + \text{Cos.}^2t = 1$, il viendra

$$\text{Sin.}t = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \qquad \text{Cos}\,t = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation, chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\{\sqrt{x^2+y^2} - a\}^2 = r^2\ ,$$

d'où

$$\sqrt{x^2+y^2} - a = \pm r\ ;$$

et, en transposant et quarrant,

$$x^2+y^2 = (a \pm r)^2\ ;$$

équation commune à deux cercles concentriques, ayant le point P pour centre commun, et ayant pour rayons la distance $PP' = a$, augmentée ou diminuée du rayon r du cercle dont le centre est P' ; et cela quelque fonction d'ailleurs que T soit de t. C'est, au surplus, un resultat qu'il était facile de prévoir : il justifie complètement l'exactitude de notre procédé.

Pour second exemple, admettons que S' soit une droite telle que les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée sur elle de l'origine soient g et h ; son équation sera

$$gx' + hy' = g^2 + h^2\ ;$$

en y mettant pour x', y' leurs valeurs en x, y, elle deviendra

(*gT*

$$\left.\begin{array}{l}(gy-hx)\text{Sin.}(T+t)+ah\,\text{Sin.}T\\ +(gx+hy)\text{Cos.}(T+t)-ag\,\text{Cos.}T\end{array}\right\}=g^2+h^2.$$

Supposons présentement que le rapport des vitesses de rotation soit tel qu'en supposant celle de S uniforme, celle de S' le soit aussi, mais n fois plus rapide ; nous aurons alors $T+t=nt$, d'où $T=(n-1)t$; notre équation deviendra donc

$$\left.\begin{array}{l}gy=hx)\text{Sin.}nt+ah\text{Sin.}(n-1)t\\ +(gx+hy)\text{Cos.}nt-ag\text{Cos.}(n-1)t\end{array}\right\}=g^2+h^2;$$

sa différentielle, par rapport à t, sera

$$\left.\begin{array}{l}n(gy-hx)\text{Cos.}nt+(n-1)ah\text{Cos.}(n-1)t\\ -n(gx+hy)\text{Sin.}nt+(n-1)ag\text{Sin.}(n-1)t\end{array}\right\}=0;$$

en joignant ces deux équations, les équations

$$\text{Sin.}^2nt+\text{Cos.}^2nt=1\,,\quad \text{Sin.}^2(n-1)t+\text{Cos.}^2(n-1)t=1\,,$$

on en déduira les valeurs de $\text{Sin.}nt$, $\text{Cos.}nt$, $\text{Sin.}(n-1)t$, $\text{Cos.}(n-1)t$; et par suite celles de $\text{Tang.}nt$, $\text{Tang.}(n-1)t$. En supposant donc qu'on trouve

$$\text{Tang.}nt=A\,,\quad \text{Tang.}(n-1)t=A'\,,$$

on en conclura

$$nt=\text{Arc.}(\text{Tang.}=A)\,,\quad (n-1)t=\text{Arc}(\text{Tang.}=A')\,;$$

d'où, en multipliant en croix

$$(n-1)\text{Arc}(\text{Tang.}=A)=n\text{Arc}(\text{Tang.}=A')\,.$$

Ce calcul ne présente rien de difficile, mais il conduit à des formules finales extrêmement compliquées.

Pour troisième exemple, supposons que la courbe S' soit un cercle, ayant g, h pour les coordonnées de son centre; en supposant toujours l'origine en P', son équation sera

$$(x'-g)^2+(y'-h)^2=r^2 \,,$$

en y mettant pour x', y' leurs valeurs en x, y, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} 2(gy-hx)\mathrm{Sin.}(T+t)+2ah\mathrm{Sin.}T+2ay\mathrm{Sin.}t \\ +2(gx+hy)\mathrm{Cos.}(T+t)-2ag\mathrm{Cos.}T+2dax\mathrm{Cos.}t \end{array}\right\}=x^2+y^2+g^2+h^2+a^2-r^2 \,.$$

Faisant, dans cet exemple, comme dans le précédent $T+t=nt$, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} 2(gy-hx)\mathrm{Sin.}nt+2ah\,\mathrm{Sin.}(n-1)t+2ay\,\mathrm{Sin.}t \\ +2(gx+hy)\mathrm{Cos.}nt-2ag\mathrm{Cos.}(n-1)t+2ax\mathrm{Cos.}t \end{array}\right\}=x^2+y^2+g^2+h^2+a^2-r^2 \,.$$

La différentielle de cette équation, par rapport à t, sera

$$\left.\begin{array}{l} n(gy-hx)\mathrm{Cos.}nt+(n-1)ah\mathrm{Cos.}(n-1)t+ay\mathrm{Cos.}t \\ -n(gx+hy)\,\mathrm{Sin.}nt+(n-1)ag\mathrm{Cos.}(n-1)t-ax\,\mathrm{Sin.}t \end{array}\right\}=0 \,,$$

Il s'agira donc d'éliminer t entre cette équation et la précédente. Pour cela, on en éliminera d'abord $\mathrm{Sin.}(n-1)t$ et $\mathrm{Cos.}(n-1)t$, au moyen des formules

$$\mathrm{Sin.}(n-1)t=\mathrm{Sin.}nt-\mathrm{Cos.}nt\mathrm{Sin.}t \,,$$

$$\mathrm{Cos.}(n-1)t=\mathrm{Cos.}nt+\mathrm{Sin.}nt\mathrm{Cos.}t\mathrm{Sin.}t \,;$$

ces équations ne renfermant plus alors que $\mathrm{Sin.}nt$, $\mathrm{Cos.}nt$, $\mathrm{Sin.}t$, $\mathrm{Cos.}t$, en leur joignant les deux équations

$$\text{Sin.}^2 t+\text{Cos.}^2 t=1\ , \qquad \text{Sin.}^2 nt+\text{Cos.}^2 nt=1\ ;$$

on parviendra aux valeurs de ces quatre quantités, et l'on achèvera comme il a été dit ci-dessus.

Passons présentement au problème général, que nous pouvons énoncer comme il suit.

PROBLÈME. Deux corps S, S′, *ne pouvant prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour de deux axes respectifs* P, P′, *fixes dans chacun d'eux, ainsi que dans l'espace, et situés ou non dans un même plan ; on suppose que la surface de* S′ *est donnée, et on demande quelle doit être la surface de* S, *pour que, ces deux corps tournant librement autour de leurs axes respectifs, avec des vitesses angulaires données quelconques, constantes ou variables, leurs surfaces soient continuellement tangentes l'une à l'autre ?*

Solution. Ici encore, comme dans le premier problème, il nous sera permis de supposer que le corps *S* est immobile, pourvu que nous transportions au corps *S′*, dont l'axe est supposé invariablement lié au sien, un mouvement de rotation autour de ce dernier axe, égal et contraire à celui du corps *S* autour de ce même axe. Le problème se trouvera ainsi réduit au suivant :

Pendant qu'un corps S′, *terminé par une surface donnée, tourne autour d'un axe* P′, *fixe dans ce corps, mais mobile dans l'espace, avec une vitesse donnée quelconque, constante ou variable, cet axe* P′ *lui-même tourne autour d'un autre axe* P, *absolument fixe dans l'espace, situé ou non dans le même plan avec lui, et auquel on le suppose invariablement lié, avec une autre vitesse donnée quelconque, également constante ou variable ; on demande quelle est la surface* S *à laquelle, dans ce double mouvement, la surface* S′ *sera continuellement tangente ?*

Or, le problème, ainsi envisagé, n'est plus qu'un cas particulier du problème général des surfaces enveloppes, et peut se traiter comme il suit.

Soit a la longueur de la perpendiculaire commune aux deux axes P, P', et soient O, O', respectivement, les points de ces axes où elle se termine. Soit, de plus, α l'angle des deux axes.

Rapportons la surface fixe cherchée S à des coordonnées rectangulaires, x, y, z, immobiles dans l'espace ; en prenant, pour plus de simplicité, l'axe P pour l'axe des z, et le point O pour origine, sans rien statuer d'ailleurs sur la direction des deux autres axes.

Dans le mouvement de l'axe P' autour de l'axe P, le point O' décrira, sur le plan des xy, un cercle ayant l'origine O pour centre et la longueur a pour rayon. Il percera constamment le plan des xy en quelque point de cette circonférence ; et si l'on désigne par t l'angle que fait avec l'axe des x la perpendiculaire commune a pour une époque quelconque, les équations du point O' seront, pour cette époque,

$$x=a\mathrm{Cos}.t\ , \qquad y=a\mathrm{Sin}.t\ .$$

Quant à l'axe P', puisqu'il passe par ce point, qu'il est constamment perpendiculaire à a, et qu'il fait continuellement un angle α avec l'axe P ou l'axe des z, ses équations, pour la même époque, seront

$$x=a\mathrm{Cos}.t-z\mathrm{Tang}.\alpha\mathrm{Sin}.t\ ,$$

$$y=a\mathrm{Sin}.t+z\mathrm{Tang}.\alpha\mathrm{Cos}.t\ .$$

Si, dans la vue d'obtenir la surface courbe, lieu de l'axe P', dans toutes ses positions autour de l'axe P, on élimine t entre ces deux équations, il viendra

$$x^2+y^2=a^2+z^2\mathrm{Tang}.^2\alpha\ ;$$

équation d'une hyperboloïde de révolution à une nappe, ainsi que cela doit être.

Rapportons présentement la surface donnée S' à un autre système de coordonnées rectangulaires x', y', z', fixes dans cette surface, mais mobiles avec elle dans l'espace, tant autour de son axe propre P′ qu'autour de l'axe fixe P; mais encore ici, pour plus de simplicité, prenons l'axe de révolution P′ lui-même pour axe des z' et le point O′ pour origine. Le plan des $x'y'$ coupera constamment celui des xy suivant la droite mobile a, et fera avec lui un angle constamment égal à α. Quant à l'axe des x', l'angle qu'il fera avec cette droite a sera un angle variable, fonction de t, dont la relation avec cet autre angle dépendra de la nature des deux mouvemens de rotation. Nous représenterons cet angle par T; d'après quoi l'axe des x' fera avec les x un angle pour lequel on aura

$$\text{Cos.}(x\,,\,x')=\text{Cos.}t\,\text{Cos.}T-\text{Sin.}t\,\text{Sin.}T\,\text{Cos.}\alpha\;;$$

Ces choses ainsi entendues, supposons que l'on veuille amener le système des x', y', z' à coïncider avec celui des x, y, z; on pourra y procéder par degrés, ainsi qu'il suit; 1.° on fera d'abord tourner le système autour de l'axe des z' de la quantité angulaire $-T$; soient alors p, q, r les dénominations respectives des nouvelles coordonnées; l'axe des p se trouvera coïncider avec la droite a; 2.° on fera ensuite tourner le second système autour de l'axe des p, de la quantité angulaire $-\alpha$; soient alors p', q', r' les dénominations respectives des nouvelles coordonnées; alors le plan des $p'q'$ coïncidera avec celui des xy; de sorte que, pour compléter la coïncidence, il ne sera plus question, 3.° que de faire tourner ce dernier système autour de l'axe des r' de la quantité angulaire $-t$, et de transporter ensuite l'origine de O′ en O.

Donc, par les formules à l'aide desquelles on passe, sur un plan, d'un système rectangulaire, à un autre qui l'est également, on aura successivement

$$x'=+p\,\text{Cos.}T+q\,\text{Sin.}T\,,\qquad r=+r'\,\text{Cos.}\alpha+q'\,\text{Sin.}\alpha\,,$$

$$y'=-p\mathrm{Sin}.T+q\mathrm{Cos}.T\ ,\qquad q=-r'\mathrm{Sin}.u+q'\mathrm{Cos}.u\ ,$$

$$z'=+r\ ;\qquad\qquad p=+p'\ ;$$

$$p'=+(x-a\mathrm{Cos}.t)\mathrm{Cos}.t+(y-a\mathrm{Sin}.t)\mathrm{Sin}.t\ ,$$

$$q'=-(x-a\mathrm{Cos}.t)\mathrm{Sin}.t+(y-a\mathrm{Sin}.t)\mathrm{Cos}.t\ ,$$

$$r'=+z\ ;$$

substituant donc les valeurs de p', q', r' dans celles de p, q, r, et ensuite celles-ci dans celle de x', y', z' on aura

$$\begin{aligned}x'=&+x(\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.T-\mathrm{Cos}.u\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.T)\\&+y(\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.T+\mathrm{Cos}.u\mathrm{Cos}.t\mathrm{Sin}.T)\\&-z\mathrm{Sin}.u\mathrm{Sin}.T-a\mathrm{Cos}.T\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'=&-x(\mathrm{Cos}.t\mathrm{Sin}.T+\mathrm{Cos}.u\mathrm{Sin}.t\mathrm{Cos}.T)\\&-y(\mathrm{Sin}.t\mathrm{Sin}.T-\mathrm{Cos}.u\mathrm{Cos}.t\mathrm{Cos}.T)\\&-z\mathrm{Sin}.u\mathrm{Cos}.T+a\mathrm{Sin}.T\ ,\end{aligned}$$

$$z'=-x\mathrm{Sin}.u\mathrm{Sin}.t+y\mathrm{Sin}.u\mathrm{Cos}.t+z\mathrm{Cos}.u\ .$$

Cela posé, soit

$$f'(x'y'z')=S'=0\ ,$$

l'équation de la surface S', rapportée à ses propres axes, et que l'on suppose donnée dans l'énoncé du problème ; en y substituant pour x', y', z' les valeurs que nous venons de trouver, en x, y, z, l'équation résultante, de la forme

$$F(x\,,y\,,z\,,t)=0\,,$$

sera celle de cette même surface S', dans toutes les positions qu'elle peut prendre, par rapport à la surface cherchée S ; ou, ce qui revient au même, cette équation sera l'équation commune à une infinité de surfaces, dont chacune sera une des positions de la surface S' par rapport à la surface S, et qu'on en déduirait en faisant varier la valeur du paramètre t. Puis donc que, dans toutes ces positions, la surface S' doit être continuellement tangente à la surface S, cette dernière ne sera autre chose que l'enveloppe de l'espace parcouru par la première. En conséquence, et d'après la théorie connue des surfaces enveloppes (*), si l'on élimine t entre cette dernière équation et sa différentielle prise par rapport à ce paramètre, l'équation résultante, de la forme

$$f(x\,,y\,,z)=S=0\,;$$

sera l'équation demandée de la surface inconnue S.

Avant de passer aux applications, considérons, en particulier, le cas où les deux axes P, P′ sont parallèles; on a alors $\text{Sin.}\alpha=0$, $\text{Cos.}\alpha=1$, et nos formules deviennent

$$x'=+x\text{Cos.}(T+t)+y\text{Sin.}(T+t)-a\text{Cos.}T\,,$$
$$y'=-x\text{Sin.}(T+t)+y\text{Cos.}(T+t)+a\text{Sin.}T\,,$$
$$z'=+z\,;$$

formules qui coïncident parfaitement avec celle du premier problème, ainsi qu'il doit en effet arriver dans ce cas.

Pour premier exemple, suppons que la surface S' soit une sphère dont le centre soit sur l'axe P′, son équation sera de la forme

---

(*) Voyez l'endroit de ce recueil déjà cité.

$$x'^2+y'^2+(z'-c)^2=r^2\ ;$$

en y mettant pour x', y', z' leurs valeurs en x, y, z, elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\{x-(a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t)\}^2+\{y-(a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t)\}^2+(z-c\text{Cos}.\alpha)^2=r^2\ .$$

La différentielle de cette équation, prise par rapport à t est

$$\left.\begin{array}{l}(a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t)\{x-(a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t)\}\\ +(a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t)\{y-(a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t)\}\end{array}\right\}=0\ .$$

si, dans ces deux équations, on considère $a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t$ et $a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t$ comme deux inconnues, on en tirera

$$a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t=\frac{x\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\pm\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}}\ ;$$

$$a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t=\frac{y\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\mp\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}}\ ;$$

prenant la somme des quarrés de ces deux équations, t disparaîtra de lui-même, et, en reduisant, on obtiendra, pour l'équation de la surface cherchée,

$$1=\frac{x^2}{\{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\pm\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}\}^2}$$

$$+\frac{y^2}{\{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\mp\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}\}^2}\ ;$$

ou, en chassant les dénominateurs et développant,

{[r^2

$$\{[r^2-a^2-c^2\text{Sin.}^2\alpha-(z-c\text{Cos.}\alpha)^2]^2-[r^2+a^2+c^2\text{Sin.}^2\alpha-(z-c\text{Cos.}\alpha)^2](x^2+y^2)\}^2$$

$$=4(a^2+c^2\text{Sin.}^2\alpha)[r^2-(z-c\text{Cos.}\alpha)^2](x^2-y^2)^2$$

équation que l'on reconnaîtra aisément pour être celle d'un canal circulo-cylindrique incliné au plan des xy.

Si l'on suppose le centre de la sphère au point O', on aura $c=0$, et l'equation deviendra

$$x^2+y^2+z^2=r^2+a^2\pm2a\sqrt{r^2-z^2}\ ;$$

équation d'un canal circulo-cylindrique de révolution autour de l'axe des z quel que soit d'ailleurs l'angle α.

Soit, en général, la surface S' une surface de révolution autour de l'axe des z'; son équation sera de la forme

$$x'^2+y'^2=\varphi(z')\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$(1-\text{Sin.}^2\alpha\text{Sin.}^2t)x^2+2yz\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}t-2ax\text{Cos.}t+a^2$$

$$+(1-\text{Sin.}^2\alpha\text{Cos.}^2t)y^2-2xz\text{Sin.}\alpha\text{Cos}\alpha\text{Sin.}t-2ay\text{Sin.}t$$

$$+\text{Sin.}^2\alpha z^2-2xy\text{Sin.}^2\alpha\text{Sin.}t\text{Cos.}t$$

$$=\varphi(-x\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}t+y\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}t+z\text{Cos.}\alpha)\ .$$

équation indépendante de T, comme on pouvait bien s'y attendre.

Si la surface S' est un cylindre, nous aurons simplement $\varphi(z')=r^2$, et l'équation sera

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+y^2-z^2\text{Sin.}^2\alpha+a^2-r^2)-\text{Sin.}^2\alpha(x\text{Sin.}t-y\text{Cos.}t)^2\\ +2z\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha(x\text{Sin.}t-y\text{Cos.}t)-2a(x\text{Cos.}t+y\text{Sin.}t)\end{array}\right\}=0$$

sa différentielle, par rapport à t, sera

$$\begin{array}{l}\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha(x\text{Cos.}t+y\text{Sin.}t)\\ \quad +a(x\text{Sin.}t-y\text{Cos.}t)\end{array}-\text{Sin.}^2\alpha(x\text{Sin.}t-y\text{Cos.}t)(x\text{Cos.}t+y\text{Sin.}t)=0;$$

Il ne s'agira donc plus que d'éliminer Sin.t et Cos.t entre ces deux équations et l'équation $\text{Sin.}^2t+\text{Cos.}^2t=1$.

Ces applications n'ont, comme l'on voit, d'autre difficulté que la longueur et la complication des calculs; et, pour cette raison, nous ne les étendrons pas davantage. Nous terminerons donc en observant que, communément, le mouvement des pignons et lanternes étant beaucoup plus rapide que celui des roues; la moindre défectuosité dans la construction de leurs ailes ou fuseaux peut entraîner de graves irrégularités dans la marche des machines; c'est donc principalement sur la parfaite exécution de ces ailes ou fuseaux que l'attention de l'artiste doit se porter; puis donc que, d'après la théorie qui vient d'être développée, leur forme est arbitraire, nous conseillerons de tailler les ailes des pignons en triangles isocèles, ou pour mieux dire en prismes triangulaires isocèles, et de faire les fuseaux des lanternes cylindriques; attendu que, ces formes étant d'une exécution facile, ce doit être aussi celles qu'on peut se promettre d'exécuter avec le plus de perfection.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de géométrie.

LA solution qui vient d'être donnée par M. Sarrus, dans le précédent mémoire, du problème des engrenages à axes fixes, ne laisse sans doute rien à désirer, à ne l'envisager simplement que sous le point de vue géométrique; mais en serait-il de même si l'on voulait avoir égard aux circonstances physiques? nous sommes loin de le croire. Il ne suffit pas alors, en effet, que les deux surfaces tournant librement sur leurs axes, avec les vitesses qui leur sont propres, soient perpétuellement tangentes l'une à l'autre; et il est extrêmement désirable que, dans leur mouvement simultané, elles n'exercent, l'une contre l'autre, qu'un simple frottement de la seconde espèce; puisque, s'il existait en outre entre l'une et l'autre un frottement de la première espèce, ce frottement tendrait rapidement à la destruction de la machine, et nuirait en outre à la régularité de sa marche si, comme il arriverait souvent, en effet, son intensité était variable.

Or, c'est là un inconvénient auquel la méthode de M. Sarrus ne saurait apporter aucun obstacle; et c'est ce qui se voit évidemment dans l'application du premier problème au cas de deux cercles. On voit, en effet que, pour que deux cercles tournant librement dans un même plan, sur leurs centres respectifs, soient continuellement tangens l'un à l'autre, il suffit que la distance entre leurs centres soit égale à la somme ou à la différence de leurs rayons; tandis que, pour qu'ils n'éprouvent l'un contre l'autre qu'un frottement de la seconde espèce, il faut en outre que leurs vitesses angulaires soient sans cesse dans un rapport constant, et que ce rapport soit aussi celui de leurs rayons; on ne peut donc pas se donner le rayon de l'un des cercles,

lorsque le rapport des vitesses angulaires est constant et donné ; et, dans le cas où, au contraire, ce rapport est variable, les courbes ne sauraient être deux cercles.

En envisageant donc le problème sous ce nouveau point de vue, et c'est ainsi seulement, à ce qu'il nous paraît, qu'il peut offrir d'utiles applications à la pratique ; on peut, par des considerations pareilles à celles que M. Sarrus a mises en usage, le ramener aux deux que voici :

I. Un cercle d'un rayon quelconque étant donné sur un plan, on propose de trouver deux courbes planes telles que l'une d'elles étant fixe sur ce plan, et l'autre tournant sur celle-ci, à la manière des roulettes, un des points du plan de la courbe mobile se trouve parcourir la circonférence donnée ; et qu'en outre ce point étant supposé décrire cette circonférence, avec une vitesse donnée quelconque, constante ou variable, la courbe mobile se trouve tourner autour de ce même point, avec une vitesse constante ou variable quelconque également donnée ?

II. Une hyperboloïde de révolution à une nappe, engendrée par la révolution d'une droite mobile autour d'une droite fixe, non située dans le même plan avec elle, étant donnée dans l'espace, on propose de trouver deux surfaces courbes, telles que l'une d'elles étant fixe et l'autre roulant librement sur elle, une droite fixe dans cette dernière, mais mobile avec elle dans l'espace, ne sorte pas de l'hyperboloïde donnée, et qu'en outre, cette droite étant supposée tourner autour de l'axe de l'yperboloïde, avec une vitesse donnée quelconque, constante ou variable, la surface mobile se trouve elle même tourner autour de ce même axe, avec une vitesse constante ou variable quelconque également donnée ?

D'après la rare sagacité dont M. Sarrus a déjà fait preuve, dans les divers articles qu'il a fournis jusqu'ici à ce recueil, nous croyons faire une chose qui lui sera agréable en recommandant spécialement à son attention deux problèmes plus difficiles que ceux qu'il s'était proposés ; et nous avons tout lieu d'espérer qu'il ne restera pas sourd à notre appel.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Intégration par approximation de toute équation différentielle quelconque ;

Par M. le professeur Kramp, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.



1. Le mémoire actuel sera destiné à intégrer, par approximation, l'équation différentielle qui suit :

$$y+A\frac{dy}{dt}=T\,;$$

dans laquelle la lettre A désigne un coefficient quelconque constant ; et la lettre T une fonction quelconque de t. L'approximation sera semblable à celle que nous avons employée pour intégrer la différentielle Xdx, dans divers mémoires déjà publiés dans ce recueil. Ainsi elle doit, dans les cas ordinaires, savoir, dans ceux qui sont sans asymptotes, sans points d'inflexion ni de rebroussement, faire connaître, dès le premier essai, l'intégrale demandée, jusqu'à *cinq*, et dès le second jusqu'à *dix* ou *douze* décimales. Il sera facile ensuite d'appliquer la méthode à des cas plus compliqués. Ainsi, l'équation plus générale

$$y+A\frac{dy}{dt}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^3y}{dt^3}+\ldots\ldots=T,$$

dans laquelle A, B, C,..... sont des constantes, rentrera dans celle de l'équation qui va nous occuper, et s'exécutera par des moyens analogues.

2. Il est bon de remarquer que l'équation

$$y+A\frac{dy}{dt}=T,$$

se réduit presque d'elle-même à

$$y+\frac{dy}{dx}=Q,$$

en posant simplement $t=Ax$. Si, au contraire, la proposée est

$$y-A\frac{dy}{dt}=T,$$

en posant également $t=Ax$, elle deviendra

$$y-\frac{dy}{dx}=Q;$$

Q étant, dans l'une et l'autre, une fonction connue de x. Nous nous occuperons donc uniquement, dans tout ce qui va suivre, des deux équations

$$y+\frac{dy}{dx}=Q, \quad y-\frac{dy}{dx}=Q;$$

ce qui introduira dans nos calculs des simplifications notables.

3. La valeur rigoureuse de y est

$$y=e^{-x}\int e^{x}Q\,dx=e^{-x}(C+X)=Ce^{-x}+Xe^{-x};$$

en désignant par C une *constante* arbitraire, et par X une certaine fonction de x, que le calcul nous fera connaître, et dont la détermination est précisément l'objet principal qui doit nous occuper. L'autre

partie Ce^{-x}, appartient généralement à toutes les équations différentielles de cette classe ; de sorte qu'après avoir trouvé l'intégrale particulière Xe^{-x}, il ne s'agira, pour la rendre complète, que de lui ajouter le terme Ae^{-x}. La méthode que nous allons enseigner suppose qu'avant tout on soit instruit des *limites* entre lesquelles l'intégrale doit être prise. En supposant qu'il faille la prendre entre $x=a$ et $x=b$, il faudra partager l'intervalle entier $b-a$ en un certain nombre de *parties égales*. Le nombre en est arbitraire ; mais, plus il sera grand, et plus on approchera de l'intégrale demandée. Il faut cependant bien se garder de croire qu'en prenant les nombres arbitraires en *progression* arithmétique, et en supposant, par exemple, x successivement égal à $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ la suite des erreurs qui en résultent soit constamment *décroissante* : la courbe qui aurait ces erreurs pour ordonnées irait en *serpentant* des deux côtés de l'axe, mais en se rapprochant toujours de cet axe, avec lequel elle coïnciderait *à l'infini* ; ce qui est conforme à la nature de la chose, et ce que j'ai bien directement prouvé d'ailleurs, par la table des erreurs de $\frac{\pi}{4}$ (*Annales*, tom. VI, pag. 379, 387). Il faut savoir de plus qu'en excluant complètement les *asymptotes*, les *points d'inflexion* et les *points de rebroussement* ; les résultats commencent à devenir incertains, lorsque les limites sont trop voisines des points où ces circonstances se rencontrent ; c'est ainsi, par exemple, qu'en appliquant les formules à la *logistique*, et en employant les coordonnées ordinaires, on trouve des erreurs assez considérables, mais qui disparaissent pourtant en prenant d'autres coordonnées, plus éloignées de la direction de l'asymptote. Les courbes qui s'intègrent le mieux par cette méthode, sont les courbes rentrantes sur elles-mêmes ; ce sont les plus employées dans la pratique, et ce sont en même temps celles auxquelles la nouvelle méthode est le plus applicable. Il est possible, au reste, que le mémoire actuel paraisse inutile à bien des personnes ; attendu que, puisque nous avons ici

$$y=e^{-x}\int e^{x}Q\,\mathrm{d}x\,;$$

il s'ensuit que l'intégration à effectuer n'est autre que celle de la formule générale $\int X\mathrm{d}x$, dans laquelle X a pris la forme particulière $e^{x}Q$; et qu'ainsi tout se réduit, pour avoir y, à diviser par e^{x} cette même intégrale que nous avons déjà enseignée à déterminer dans nos précédens mémoires. Mais d'abord le produit $e^{x}Q$ diffère considérablement de la simple fonction Q, et doit, par suite, introduire une différence notable dans l'intégrale. En outre, l'intégration de $e^{x}Q\mathrm{d}x$ est un passage nécessaire pour parvenir à l'intégration de l'équation

$$y+P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Q,$$

ainsi qu'à celles d'autres équations d'une forme plus compliquée.

4. Commençons par supposer le nombre arbitraire égal à *cinq unités* ; ce qui donne

$$y=A+Bx+Cx^{2}+Dx^{3}+Ex^{4}+Fx^{5}\ ,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=B+2Cx+3Dx^{2}+4Ex^{3}+5fx^{4}\ ;$$

et par conséquent

$$Q=y+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(A+B)+(B+2C)x+(C+3D)x^{2}$$

$$+(D+4E)x^{3}+(E+5F)x^{4}+Fx^{5}\ .$$

En supposant successivement ici à la variable x les valeurs entières et positives 0, 1, 2, 3, 4, 5 ; et en désignant par q_0, q_1, q_2, q_2, q_3, q_4, q_5, celles qui en résultent pour Q, nous aurons

$$q_0 = A + B,$$

$$q_1 = A + 2B + 3C + 4D + 5E + 6F,$$

$$q_2 = A + 3B + 8C + 20D + 48E + 112F,$$

$$q_3 = A + 4B + 15C + 54D + 189E + 648F,$$

$$q_4 = A + 5B + 24C + 112D + 512E + 2304F,$$

$$q_5 = A + 6B + 35C + 200D + 1125E + 6250F.$$

En ôtant chacune de ces équations de celle qui la suit immédiatement et dénotant par Δq_0, Δq_1, Δq_2, Δq_3, Δq_4, les différences qui en résultent, on aura

$$\Delta q_0 = B + 3C + 4D + 5E + 6F,$$

$$\Delta q_1 = B + 5C + 16D + 43E + 106F,$$

$$\Delta q_2 = B + 7C + 34D + 141E + 536F,$$

$$\Delta q_3 = B + 9C + 58D + 323E + 1656F,$$

$$\Delta q_4 = B + 11C + 88D + 613E + 3946F;$$

Dénotant de même par $\Delta^2 q_0$, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^2 q_3$ les différences consécutives de celles-ci, divisées par *deux*, il viendra

$$\Delta^2 q_0 = C + 6D + 19E + 50F,$$

$$\Delta^2 q_1 = C + 9D + 49E + 215F,$$

$$\Delta^2 q_2 = C + 12D + 91E + 560F,$$

$$\Delta^2 q_3 = C + 15D + 145E + 1145F.$$

Dénotant en outre par $\Delta^3 q_0$, $\Delta^3 q_1$, $\Delta^3 q_2$ les différences consécutives de celles-ci, divisées par *trois*, nous aurons

$$\Delta^3 q_0 = D + 10E + 55F,$$

$$\Delta^3 q_1 = D + 14E + 115F;$$

$$\Delta^3 q_2 = D + 18E + 195F.$$

Dénotant encore par $\Delta^4 q_0$; $\Delta^4 q_1$ les différences consécutives de ces dernières, divisées par *quatre*, il viendra

$$\Delta^4 q_0 = E + 15F,$$

$$\Delta^4 q_1 = E + 20F,$$

Dénotant enfin par $\Delta^5 q_0$ la différence de ces deux-ci, divisées par *cinq*, on aura

$$\Delta^5 q_0 = F.$$

5. En prenant seulement la première équation de chaque série, et supprimant les indices, désormais inutiles, nous aurons, pour le diviseur *cinq*,

$$\Delta^5 q = F;$$

$$\Delta^4 q = E + 15F,$$

$$\Delta^3 q = D + 10E + 55F;$$

$$\Delta^2 q = C + 6D + 19E + 50F,$$

$$\Delta q = B + 3C + 4D + 5E + 6F,$$

$$q = A + B;$$

Si, au lieu du nombre *cinq*, nous eussions pris tout autre nombre, le nombre *douze*, par exemple, nous aurions trouvé, par un semblable calcul,

$$\Delta^{12} q = N\,,$$

$$\Delta^{11} q = M + 78N\,,$$

$$\Delta^{10} q = L + 66M + 2365N\,,$$

$$\Delta^{9} q = K + 55L + 1650M + 36135N\,,$$

$$\Delta^{8} q = I + 45K + 1110L + 20130M + 301587N\,,$$

$$\Delta^{7} q = H + 36I + 714K + 10500L + 128667M + 1595240N\,,$$

$$\begin{aligned}\Delta^{6} q = G + 28H + 434I + 5040K + 49287L + 430584M \\ + 3477496N\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{5} q = F + 21G + 245H + 2170I + 16401K + 112035L \\ + 764505M + 4340160N\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{4} q = E + 15F + 125G + 805H + 4501I + 25079K \\ + 111805L + 520905M + 2360501N\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{3} q = D + 10E + 55F + 240G + 931H + 3374I \\ + 11719K + 39580L + 131131M + 428538N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{2} q = C + 6D + 19E + 50F + 121G + 280H \\ + 631I + 1398K + 3061L + 6644M \\ + 24323N\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\, q = B + 3C + 4D + 5E + 6F + 7G \\ + 8H + 9I + 10K + 11L \\ + 12M + 13N\,,\end{aligned}$$

$$q = A + B\,.$$

Cette table n'est pas seulement applicable au nombre douze ; elle l'est également à tous les diviseurs inférieurs, en s'arrêtant dans chacune des formules à la lettre qui marque la limite de la division ; à la lettre G, par exemple, si le diviseur est *six* ; à la lettre I, si ce diviseur est *huit* ; et ainsi des autres.

6. Il reste donc à déterminer, à l'aide de ces équations, les valeurs de N, M, L, K, I, ... A, pour les substituer dans celle de y, afin de présenter cette intégrale sous la forme d'une série disposée suivant les différences des différens ordres de la quantité q. Comme le calcul est très-facile, il suffira d'en offrir ici les résultats. Ces résultats sont

$$N=\Delta^{12}q,$$

$$M=\Delta^{11}q-78\Delta^{12}q;$$

$$L=\Delta^{10}q-66\Delta^{11}q+2783\Delta^{12}q;$$

$$K=\Delta^{9}q-55\Delta^{10}q+1980\Delta^{11}q-60500\Delta^{12}q;$$

$$I=\Delta^{8}q-45\Delta^{9}q+1365\Delta^{10}q-35970\Delta^{11}q+901923\Delta^{12}q,$$

$$H=\Delta^{7}q-36\Delta^{8}q+906\Delta^{9}q-20370\Delta^{10}q+445533\Delta^{11}q$$
$$-9852942\Delta^{12}q,$$

$$G=\Delta^{6}q-28\Delta^{7}q+574\Delta^{8}q-10878\Delta^{9}q+205863\Delta^{10}q$$
$$-4020786\Delta^{11}q+82310129\Delta^{12}q,$$

$$F=\Delta^{5}q-21\Delta^{6}q+343\Delta^{7}q-5404\Delta^{8}q+87717\Delta^{9}q$$
$$-150450\Delta^{10}q+27541646\Delta^{11}q-539856504\Delta^{12}q$$

$$E=\Delta^{4}q-15\Delta^{5}q+190\Delta^{6}q-2450\Delta^{7}q+33789\Delta^{8}q$$
$$-505869\Delta^{9}q+8246195\Delta^{10}q-146117730\Delta^{11}q$$
$$+2804540596\Delta^{12}q;$$

$D=\Delta^{3}$

$$D=\Delta^3q-10\Delta^4q+95\Delta^5q-985\Delta^6q+11424\Delta^7q-148288\Delta^8q$$
$$+2141600\Delta^9q-34157480\Delta^{10}q+597224496\Delta^{11}q$$
$$-11369080360\Delta^{12}q\ ,$$

$$C=\Delta^2q-\ 6\Delta^3q+41\Delta^4q-335\Delta^5q+\ 3229\Delta^6q-\ 36036\Delta^7q$$
$$+\ 457932\Delta^8q-6534384\Delta^9q+103499016\Delta^{10}q$$
$$-\ 1802302128\Delta^{11}q+34227784920\Delta^{12}q\ ,$$

$$B=\Delta q-\ 3\Delta^2q+14\Delta^3q-\ 88\Delta^4q+\ 694\Delta^5q-\ 6578\Delta^6q$$
$$+\ 72792\Delta^7q-\ 920904\Delta^8q+\ 13109088\Delta^9q$$
$$-\ 207360912\Delta^{10}q+\ 3608233056\Delta^{11}q$$
$$-68495486640\Delta^{12}q\ ,$$

$$A=\ q-\ \Delta q+3\Delta^2q-\ 14\Delta^3q+\ 88\Delta^4q-\ 694\Delta^5q$$
$$+\ 6578\Delta^6q-\ 72792\Delta^7q+\ 920904\Delta^8q$$
$$-\ 13109088\Delta^9q+\ 207360912\Delta^{10}q$$
$$-\ 3608233056\Delta^{11}q+68495486640\Delta^{12}q\ .$$

7. La loi que suivent les coefficiens de Δq, Δ^2q, Δ^3q, ... de la table précédente est extrêmement remarquable ; et ils ont avec ceux des *facultés numériques*, dont j'ai traité dans mon *Analise des réfractions* (pag. 71) une analogie singulière, dont je n'ai pu encore me rendre compte. Voici en quoi cette analogie consiste. Supposons, par exemple, que l'on demande les coefficiens de Δ^6q dans les valeurs de A, B, C, D, E, F, G ? On rassemblera les coefficiens de la faculté à exposant *six*, que l'on trouvera être 1, 15, 85, 225, 274, 120 ; on les multipliera respectivement par les facultés 6!, 5!, 4!, 3!, 2!, 1! ou 720, 120, 24, 6, 2, 1 ; ce qui donnera les produits

720, 1800, 2040, 1350, 548, 120 ;

prenant successivement le premier *seul*, puis la somme *deux* premiers, puis celle des *trois* premiers, et ainsi de suite, jusqu'au dernier, on formera la nouvelle suite

$$720\ ,\ 2520\ ,\ 4560\ ,\ 5910\ ,\ 6458\ ,\ 6578\ ;$$

dont les termes, divisés respectivement par les mêmes facultés $6!$, $5!$, $4!$, $3!$, $2!$, $1!$, donneront les quotiens

$$1\ ,\ 21\ ,\ 190\ ,\ 985\ ,\ 3229\ ,\ 6578\ ,$$

qui sont précisément les coefficiens de $\Delta^6 q$.

Supposons encore que l'on demande les coefficiens de $\Delta^{12} q$? Il faudra d'abord écrire ceux de la faculté à exposant 12; ce sont

1 . . . . 1 ,
2 . . . . 66 ,
3 . . . . 1925 ,
4 . . . . 32670 ,
5 . . . . 357423 ,
6 . . . . 2637558 ;
7 . . . . 13339535 ,
8 . . . . 45995730 ,
9 . . . . 105258076 ,
10 . . . . 150917976 ,
11 . . . . 120543840 ,
12 . . . . 39916800 ;

on les multipliera respectivement par les facultés

$12! = 479001600$,
$11! = 39916800$,
$10! = 3628800$,
$9! = 362880$,
$8! = 40320$,
$7! = 5040$,
$6! = 720$,
$5! = 120$,
$4! = 24$,
$3! = 6$,
$2! = 2$,
$1! = 1$;

ce qui donnera les produits

1.er . . . . . . 479001600 ,
2. . . . . 2630508800 ;
3. . . . . 6980440000 ;
4. . . . . 11855289600 ,
5. . . . . 14411295360 ;
6. . . . . 13293292320 ,
7. . . . . 9604465200 ;
8. . . . . 5519487600 ,
9. . . . . 2526193824 ,
10. . . . . 905807856 ;
11. . . . . 242087680 ;
12. . . . . 39916800 ;

prenant ensuite le premier, puis la somme des deux premiers, puis celle des trois premiers, et ainsi de suite, il viendra

1.er . . . . . . 479001600 ,
2. . . . . 3113510400 ,
3. . . . . 10098950400 ,
4. . . . . 21954240000 ,
5. . . . . 36365535360 ,
6. . . . . 49658827680 ,
7. . . . . 59263292880 ,
8. . . . . 64782780480 ,
9. . . . . 67308974304 ,
10. . . . . 68214482160 ,
11. . . . . 68455569840 ,
12. . . . . 68495486640 ;

divisant enfin ces sommes par les mêmes facultés qui avaient d'abord été employées comme multiplicateurs, on obtiendra, pour la série des coefficiens de $\Delta^{12}q$, dans nos formules,

N . . . . 1 ,
M, ... 78 ,
L, ... 2783 ,
K, ... 60570 ,
I, ... 901923 ,
H, ... 9852942 ,
G, ... 82310129 ,

F, ... 539856504,

E, ... 2804540596,

D, ... 11369080360,

C, ... 34227784920,

B, ... 68495486640.

8. Un second théorème, qui n'est pas moins digne de remarque, quoiqu'il n'ait point encore pour lui une démonstration rigoureuse, mais qui est fondé sur une induction plus que suffisante, et duquel d'ailleurs je me propose de m'occuper encore, c'est que toutes ces séries de coefficiens qui multiplient les différences d'un même ordre dans nos formules (6) jouissent sensiblement de la propriété de se reproduire eux-mêmes en les divisant respectivement par les nombres naturels 1, 2, 3, 4,......; et se rapprochent en cela des termes de la série hypergéométrique ordinaire 1, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{720}$,..... qui multiplient respectivement les termes 1, x, x^2, x^3, x^4,.... dans le développement de e^x, et qui jouissent rigoureusement de cette propriété.

Prenons, par exemple, du plus grand au plus petit, les coefficiens de $\Delta^7 q$, et divisons-les respectivement par 1, 2, 3, 4,.....; nous aurons

$$\tfrac{1}{1}.72792=72792\,;$$

$$\tfrac{1}{2}.72792=36396\,,$$

$$\tfrac{1}{3}.36036=12012\,;$$

$$\tfrac{1}{4}.11424=\ 2856\,,$$

$$\tfrac{1}{5}.\ 2450=\ \ 490\,;$$

....

qui sont à peu près ces mêmes coefficiens, le premier excepté.

En opérant de la même manière sur les coefficiens de $\Delta^{10}q$; nous trouverons

$$\tfrac{1}{1}\cdot 207360912 = 207360912\;;$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot 207360912 = 103680456\;;$$

$$\tfrac{1}{3}\cdot 103499016 = 34499672\;;$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot 34157480 = 8539370\;;$$

$$\tfrac{1}{5}\cdot 8246195 = 1649239\;;$$

. . . .

qui sont à peu près ces mêmes coefficiens.

Enfin, en opérant encore ainsi sur les coefficiens de $\Delta^{12}q$, nous aurons

$$\tfrac{1}{1}\cdot 68495486640 = 68495486640\;,$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot 68495486640 = 34247743320\;;$$

$$\tfrac{1}{3}\cdot 34227784920 = 11409261640\;,$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot 11367080360 = 2842270090\;,$$

$$\tfrac{1}{5}\cdot 2804540596 = 560908119\;,$$

$$\tfrac{1}{6}\cdot 539856504 = 89976084\;;$$

. . . . ;

où la même loi se manifeste également. La démonstration rigoureuse de ce théorème serait sans doute difficile; mais en attendant, nous l'adopterons, avec d'autant plus de fondement qu'il nous conduira à des résultats exacts et décisifs.

9. L'intégration complète de l'équation $y+\frac{dy}{dx}=Q$, équation dans laquelle la lettre Q désigne une fonction quelconque de x, suppose deux choses : d'abord la nouvelle fonction de x dont la différentiation nous ramenera à l'équation proposée, et ensuite la *constante*, multipliée par une certaine autre fonction de x. Nous avons vu que ce dernier produit restait le même quelle que pût être la fonction Q; en conséquence, pour le déterminer, il n'y a qu'à voir ce qu'il deviendra dans la supposition la plus simple qu'on puisse adopter pour Q, qui est celle de $Q=0$. L'équation sera alors

$$y+\frac{dy}{dx}=0;$$

puis donc que nous avons supposé

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots\ldots;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4+\ldots\ldots;$$

il faudra résoudre l'équation

$$0=(A+B)+(B+2C)x+(C+3D)x^2+(D+4E)x^3+\ldots\ldots$$

Cela conduira aux équations déjà trouvées (6) avec cette seule différence qu'ici q, Δq, $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, ... seront *zéro*.

Il en faudra seulement rejeter la première équation $N=\Delta'^2 q$ qui devenant, dans le cas actuel, $N=0$, donnerait *zéro* pour valeur de tous les autres coefficiens, tandis qu'il faut nécessairement laisser du jeu à la *constante* qu'on se propose d'ajouter. Cette légère attention nous met dans la position d'avoir cette *constante*, qu'il eût été bien difficile de trouver d'une autre manière quelconque.

11. Avec cette attention, les équations trouvées (6) nous donneront

$$\begin{aligned}
M &= -78N\,,\\
L &= +2783N\,;\\
K &= -60500N\,,\\
I &= +901923N\,,\\
H &= -9852942N\,,\\
G &= +82310129N\,,\\
F &= -539856504N\,,\\
E &= +2804540596N\,,\\
D &= -11369080360N\,,\\
C &= +34227784920N\,,\\
B &= -68495486640N\,;\\
A &= +68495486640N\,.
\end{aligned}$$

Il ne restera plus qu'à diviser la dernière de ces équations par chacune de celles qui la précèdent, pour avoir tous ces coefficiens l'un après l'autre. Le premier terme A sera arbitraire ; il formera la constante du problème ; et l'on aura pour les autres

$$\begin{aligned}
68495486640B &= -68495486640A\,,\\
68495486640C &= +34227784920A\,,\\
68495486640D &= -11369080360A\,,\\
68495486640E &= +2804540596A\,;\\
68495486640F &= -539856504A\,;\\
68495486640G &= +82310129A\,;\\
68495486640H &= -9852942A\,;
\end{aligned}$$

$$68495486640I = +901923A,$$

$$68495486640K = -60500A,$$

$$68495486640L = +2783A,$$

$$68495486640M = -78A,$$

$$68495486640N = +A.$$

En conséquence du théorème énoncé ci-dessus (8), on voit fort bien ce que ces rapports compliqués deviendraient dans l'infini; on aurait alors

$$B = -A,$$

$$2C = +A,$$

$$6D = -A,$$

$$24E = +A,$$

$$120F = -A,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

ce qui donnerait

$$y = A\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \ldots\ldots\right) = Ae^{-x},$$

conformément aux vrais principes du calcul intégral. On voit en même temps l'identité absolue entre le coefficient constant A et le premier terme de la série, qui répond à $x = 0$.

12. Reste donc à trouver l'autre fonction de x, dont la différentiation nous conduit proprement à l'équation proposée

$$y+\frac{dy}{dx}=Q,$$

Comme on a supposé

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots,$$

on a, en mettant à la place de A, B, C, D,...... les valeurs trouvées (6),

$$\begin{aligned}
y=\;&q\\
&+(x-1)\Delta q\\
&+(x^2-3x+3)\Delta^2 q\\
&+(x^3-6x^2+14x-14)\Delta^3 q\\
&+(x^4-10x^3+41x^2-88x+88)\Delta^4 q\\
&+(x^5-15x^4+95x^3-335x^2+694x-694)\Delta^5 q\\
&+(x^6-21x^5+190x^4-985x^3+3229x^2-6578x+6578)\Delta^6 q\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mettant ici, à la place de x, les valeurs successives 2, 3, 4,..... on aura

Pour $x=2$, $y=q+\Delta q+\Delta^2 q$,

3, $y=q+2\Delta q+3\Delta^2 q+\Delta^3 q$,

4, $y=q+3\Delta q+7\Delta^2 q+10\Delta^3 q+8\Delta^4 q$;

5, $y=q+4\Delta q+13\Delta^2 q+31\Delta^3 q+48\Delta^4 q+26\Delta^5 q$,

6, $y=q+5\Delta q+21\Delta^2 q+70\Delta^3 q+172\Delta^4 q+266\Delta^5 q+194\Delta^6 q$;

$$7,\ y=q+6\Delta q+31\Delta^2 q+133\Delta^3 q+452\Delta^4 q+1126\Delta^5 q+1790\Delta^6 q$$
$$+1142\Delta^7 q,$$

$$8,\ y=q+7\Delta q+43\Delta^2 q+226\Delta^3 q+984\Delta^4 q+3386\Delta^5 q+8546\Delta^6 q$$
$$+13672\Delta^7 q+9736\Delta^8 q,$$

$$9,\ y=q+8\Delta q+57\Delta^2 q+355\Delta^3 q+1888\Delta^4 q+8306\Delta^5 q$$
$$+28862\Delta^6 q+73494\Delta^7 q+119112\Delta^8 q,$$

. . . .

13. En mettant ici, à la place des différences successives de q leurs valeurs en q_0, q_1, q_2, q_3, ... savoir :

$$\Delta q=q_1-q_0,$$
$$2\Delta^2 q=q_2-2q_1+q_0,$$
$$6\Delta^3 q=q_3-3q_2+3q_1-q_0,$$
$$24\Delta^4 q=q_4-4q_3+6q_2-4q_1+q_0,$$
$$120\Delta^5 q=q_5-5q_4+10q_3-10q_2+5q_1-q_0,$$

. . . .

on trouvera

Pour $x=2$.... $2y=q_0+q_2$,

3.... $6y=2q_0-3q_1+6q_2+q_3$,

4.... $6y=q_0-2q_1+3q_2+2q_3+2q_4$,

5.... $60y=7q_0-25q_1+50q_2-40q_3+65q_4+13q_5$,

6.... $360y=19q_0-72q_1+135q_2-80q_3+45q_4+216q_5+97q_6$,

$$7\ldots\ 2520y=108q_0-623q_1+1764q_2-2835q_3+3220q_4-1953q_5+2268q_6$$
$$+5719q_7\ ,$$

$$8\ldots 20160y=300q_0-1536q_1+3416q_2-2688q_3-1680q_4+8960q_5-7224q_6$$
$$+15744q_7+48689q_8\ ,$$

$$9\ldots 151120y=260q_0-2115q_1+8218q_2-19278q_3+30744q_4-34030q_5$$
$$+28560q_6-14778q_7+14148q_8+3391q_9\ ,$$

. . . .

Dans le cas particulier où les quantités q_0 , q_1 , q_2 , q_3 ,..... seraient égales entre elles, on aurait, dans toutes ces équations, $y=q$; ce qui pourra servir au besoin à vérifier l'exactitude de nos formules.

14. *Exemple I.* Soit l'équation

$$y+\frac{dy}{dx}=a\ ,$$

On aura, dans ce cas, $Q=a$; ainsi q_0, q_1, q_2, q_3,..... sont ici tous égaux à a ; en conséquense, toutes les formules donnent pour intégrale complète

$$y=Ae^{-x}+a\ .$$

15. *Exemple II.* Soit l'équation

$$y=\frac{dy}{dx}=x\ .$$

On aura $Q=x$; donc $q_0=0$, $q_1=1$, $q_2=2$, $q_3=3$,..... ; et toutes les formules s'accordent également à donner

$$y=Ae^{-x}+x-1\ ;$$

ce qui est rigoureusement conforme aux principes du calcul ; on tire, en effet,

De $x=2$, $2y=q_0+q_2=2$; donc $y=1=2-1=x-1$;

De $x=3$, $6y=2q_0-3q_1+6q_2+q_3=12$; donc $y=2=3-1=x-1$;

De $x=4$, $6y=q_0-2q_1+3q_2+2q_3+2q_4=18$; donc $y=3=4-1=x-1$;

De $x=5$, $60y=7q_0-25q_1+50q_2-40q_3+55q_4+13q_5=240$; donc $y=4=5-1=x-1$;

il en sera de même des suivans, de sorte qu'on aura généralement et rigoureusement

$$y=Ae^{-x}+x-1\ .$$

16. *Exemple III.* Soit l'équation

$$y+\frac{dy}{dx}=x^2\ .$$

On aura $Q=x^2$ donc

$$q_0=0\ ,\ q_1=1\ ,\ q_2=4\ ,\ q_3=9\ ,\ q_4=16\ ,\ \ldots\ldots$$

cela donne

Pour $x=2$,	$2y=4$,	donc $y=$	$2=x^2-2x+2$,
3,	$6y=30$,		$5=x^2-2x+2$,
4,	$6y=60$,		$10=x^2-2x+2$,
5,	$60y=1020$,		$17=x^2-2x+2$,
6,	$360y=9360$,		$26=x^2-2x+2$,
	....		....

on aura donc généralement

$$y=Ae^{-x}+x^2-2x+2\ ;$$

valeur qui en effet est rigoureuse.

17. *Exemple IV*. Soit l'équation

$$y+\frac{dy}{dx}=x^3\ ;$$

On aura ici $Q=x^3$, d'où

$$q_0=0\ ,\ q_1=1\ ,\ q_2=8\ ,\ q_3=27\ ,\ q_4=64\ ,\ldots.$$

donc à commencer par la valeur 3

Pour $x=3$,	$y=$ 12 ,
4 ,	34 ,
5 ,	74 ,
6 ,	138 ,
7 ,	362 ,
. . . . .	. . . . .

Ces nombres étant tous compris sous la formule x^3-3x^2+6x-6 ; on aura généralement

$$y=Ae^{-x}+x^3-3x^2+6x-6\ ,$$

intégrale qui, en effet, est rigoureusement exacte.

18. *Exemple V*. Soit l'équation

$$y+\frac{dy}{dx}=x^4\ .$$

Ayant ici $Q=x^4$, on aura

$$q_0=0\ ,\ q_1=1\ ,\ q_2=16\ ,\ q_3=81\ ,\ q_4=256\ ,\ \ldots ;$$

donc, en commençant par la valeur 4,

Pour $x=4$,	$y=120$,
5,	329,
6,	744,
....	

valeurs comprises dans la formule $x^4-4x^3+12x^2-24x+24$, en sorte qu'on aura

$$y=Ae^{-x}+x^4-4x^3+12x^2-24x+24\ ;$$

ce qui est rigoureusement exact.

19. Soit plus généralement l'équation

$$y+\frac{dy}{dx}=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4\ ;$$

on aura

$$Q=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4\ ;$$

d'où

$$q_0=a\ ,$$
$$q_1=a+b+c+d+e\ ,$$
$$q_2=a+2b+4c+8d+16e\ ,$$
$$q_3=a+3b+9c+27d+81e\ ,$$
$$q_4=a+4b+16c+64d+256e\ ,$$
$$q_5=a+5b+25c+125d+625e\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc, en partant de la valeur 5,

Pour $x=5$, $y=a+4b+17c+74d+329e$,

6, $a+5b+26c+138d+744e$,

7, $a+6b+37c+232d+1473e$,

. . . .

résultats qui sont tous compris dans la formule générale

$$a+b(x-1)+c(x^2-2x+2)+d(x^3-3x^2+6x-6)+e(x^4-4x^3+12x^2-24x+24):$$

de sorte qu'on doit avoir

$$\begin{aligned} y=Ae^{-x}+a & \\ &+b(x-1) \\ &+c(x^2-2x+2) \\ &+d(x^3-3x^2+6x-6) \\ &+e(x^4-4x^3+12x^2-24x+24). \end{aligned}$$

20. Les résultats obtenus dans ce mémoire ont tous été exacts et rigoureux; et ils ont dû l'être à raison de ce que les exposans de toutes les puissances dont se composait la quantité Q étaient *entiers* et *positifs*. Dans le mémoire qui suivra celui-ci, nous prendrons pour Q des fonctions quelconques de x; nous leur appliquerons la même méthode; nous serons conduits à des résultats absolument neufs, et nous aurons lieu d'être satisfaits de leur exactitude; conséquence nécessaire de l'approximation que nous avons employée. La seule difficulté qui reste sera la détermination de la *constante*. Dans le cas que nous venons d'exposer, savoir $y+\frac{dy}{dx}=Q$, cette constante était Ae^{-x}; encore ne sommes-nous parvenus à ceci que par une induction très-permise; mais qui eut été difficile dans d'autres cas quelconques.

ANALISE

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Recherches sur la nature et les signes des racines dans les équations de tous les degrés ;

Par un Abonné.



Si l'on substitue successivement à la place de l'inconnue, dans une équation numérique, de degré quelconque, les termes d'une progression ayant pour différence constante un nombre plus petit que la différence entre ses deux racines les moins inégales, et s'étendant de la limite inférieure de ses racines négatives à la limite supérieure de ses racines positives ; il est clair que les résultats présenteront précisément autant de changement de signes que la proposée aura de racines réelles, et qu'on aura, en même temps, deux limites de chacune d'elles ; de manière qu'on saura positivement combien cette équation a de racines réelles positives, combien elle a de racines réelles négatives, et conséquemment combien elle en a d'imaginaires.

Ce procédé ne laisse certainement rien à désirer en théorie ; mais il est à peu près illusoire dans la pratique, attendu que la recherche d'un nombre plus petit que la différence entre les deux racines les moins inégales exige le recours à l'équation aux quarrés des différences des racines de la proposée, qu'on n'a encore calculé cette équation que pour les cinq premiers degrés seulement, qu'il y a peu d'apparence qu'aucun géomètre ait le courage d'en pousser le calcul plus loin, et que quelqu'un l'eût-il, il est à croire

que la complication excessive des résultats ôterait toute envie d'en faire l'application.

C'est donc une question non encore résolue, du moins sous le point de vue pratique, que celle de la recherche de la nature et des signes des racines des équations numériques. Sans trop oser l'espérer, nous désirons que les préceptes que nous allons donner sur ce sujet soient jugés de nature à atteindre le but. Ces préceptes auront pour bases les observations suivantes.

I. Une courbe parabolique d'un degré pair, dont l'équation est conséquemment de la forme

$$Ax^{2n}+Bx^{2n-1}+\ldots\ldots+R=y\,,$$

a toujours deux branches qui s'étendent à l'infini ; l'une dans la région des x et y positives, et l'autre dans la région des x négatives et des y positives. Car, en faisant, dans cette équation, $x=\pm\infty$, on a également $y=+\infty$.

II. Une courbe parabolique d'un degré impair, dont l'équation est conséquemment de la forme

$$Ax^{2n+1}+Bx^{2n}+\ldots\ldots+R=y\,,$$

a toujours deux branches qui s'étendent à l'infini, l'une dans la région des x et y positives, et l'autre dans la région des x et y négatives. Car, en faisant, dans cette équation, $x=\pm\infty$, on a $y=\pm\infty$, respectivement.

III. Une équation numérique en x, d'un degré quelconque, étant donnée, et le nombre de ses racines réelles étant supposé connu, on peut toujours obtenir, pour chacune de ces racines, deux limites qui ne comprennent entre elles que cette seule racine, et savoir

conséquemment combien elle a de racines positives et de racines réelles négatives.

Cela est d'abord sans difficulté, lorsque la différence entre les deux racines les moins inégales surpasse l'unité; car, en substituant pour x tous les nombres entiers compris entre les limites extrêmes des racines, on aura autant de changemens de signes dans les résultats que l'équation aura de racines réelles, et ces changemens de signes, en même temps qu'ils feront connaître les signes des racines, indiqueront, pour chacune d'elles, deux limites ne comprenant entre elles que cette seule racine.

Mais, comme la différence entre deux racines d'une équation peut fort bien être moindre que l'unité, il est fort possible qu'en y substituant, à la place de x, les seuls nombres consécutifs de la suite naturelle, il y ait, entre deux nombres consécutivement substitués, deux ou un plus grand nombre de racines réelles; et il est évident qu'alors le nombre des changemens de signes dans les résultats des substitutions se trouvera inférieur à celui des racines réelles que l'on sait exister dans l'équation. On n'aura donc pas dans ce cas des limites individuellement propres à chacune d'elles.

On pourrait bien tenter d'éluder cette difficulté, en multipliant préalablement les racines de la proposée par quelque nombre entier; mais, comme plusieurs de ses racines pourraient différer entre elles d'une quantité extrêmement petite, quelque grand que pourrait être le multiplicateur dont on aurait fait choix, il pourrait bien se faire qu'il ne le fût pas assez pour remplir le but.

Pour mettre cette difficulté mieux en évidence, supposons que la proposée, du quatrième degré seulement, soit

$$(25x^2-120x+142)(x^2-14x+50)=0\,,$$

ou

$$25x^4-470x^3+3072x^2-7988x+7100=0\,,$$

qui n'a que deux racines réelles, lesquelles sont toutes deux com-

prises entre 2 et 3. Supposons que l'on sache seulement qu'elle n'a que deux racines réelles, sans savoir en quel lieu elles se trouvent; par la règle de Descartes, on verra bien qu'elles sont toutes deux positives; mais si, dans la vue d'en trouver les limites, on substitue pour x les nombres de la suite naturelle, on obtiendra les résultats suivans:

$x=0$	résultat $=7100$;
1	1734,
2	52,
3	119,
4	620,
5	860,
6	644,
7	562,
8	1604;

qui nous montrent seulement que les deux racines réelles que l'on sait exister dans l'équation proposée doivent être comprises soit entre 1 et 3 soit entre 6 et 8, sans nous faire connaître lequel des deux cas a effectivement lieu, et, à plus forte raison, sans nous donner les limites séparées de l'une et de l'autre.

Soit encore l'équation

$$42x^4-13x^3+43x^2-13x+1=0;$$

que l'on sait n'avoir que deux racines réelles, et que l'on voit d'ailleurs n'avoir point de racines réelles au-dessus de 2; la substitution pour x des trois premiers nombres naturels donnera

$x=0$ résultats $=$ 1,
1 60,
2 715,

ce qui nous montrera seulement que les deux racines réelles dont il s'agit sont au-dessous de l'unité, sans nous donner les limites distinctes de chacune d'elles.

Afin donc de lever cette difficulté qui, comme on le sent bien, doit croître avec le degré de l'équation, nous remarquerons d'abord que, comme en augmentant les racines d'une équation proposée d'une quantité égale à la limite de ses racines négatives, prise en plus, on rend toutes ses racines réelles positives, il nous sera toujours permis de supposer que, comme dans les exemples ci-dessus, la proposée n'a que des variations de signes, et conséquemment des racines imaginaires et des racines réelles positives seulement.

Nous rappellerons, en second lieu, un théorème démontré par M. Budan, dans un mémoire présenté à l'institut en 1812 ou 1813, et qui consiste en ce qu'*une équation en* x—p *de degré quelconque*, *ne saurait avoir* n *racines entre* p *et* q, *si l'équation en* x—q *n'a pas* n *permanences de plus que l'équation en* x—p.

Avant d'appliquer ce principe, faisons connaître une notation abrégée qui en rendra l'application beaucoup plus facile et intelligible, et qui peint à la fois aux yeux et le nombre des permanences et le signe du dernier terme d'une équation de degré quelconque. Cette notation consiste à écrire, en général,

$$(x-p)\ldots\ldots n\ldots\ldots +R,$$

pour exprimer qu'une transformée en $x-p$ à n permanences et son dernier terme positif ; et nous écririons, au contraire,

$$(x-p)\ldots\ldots n\ldots\ldots -R,$$

si nous voulions exprimer que la même transformée, ayant toujours n permanences, a son dernier terme négatif.

Cela posé, reprenons l'équation du quatrième degré de notre premier exemple que, suivant notre notation, nous pouvons représenter par

$$(x)\ldots\ldots0\ldots\ldots+R;$$

si, par la méthode de M. Budan, nous cherchons ses transformées successives, nous pourrons, à l'aide de la même notation, les représenter comme il suit :

$$(x)\ldots\ldots0\ldots\ldots+R,$$
$$(x-1)\ldots\ldots0\ldots\ldots+R,$$
$$(x-2)\ldots\ldots0\ldots\ldots+R;$$
$$(x-3)\ldots\ldots2\ldots\ldots+R,$$
$$(x-4)\ldots\ldots2\ldots\ldots+R,$$
$$(x-5)\ldots\ldots2\ldots\ldots+R,$$
$$(x-6)\ldots\ldots2\ldots\ldots+R;$$
$$(x-7)\ldots\ldots4\ldots\ldots+R;$$

l'application du théorème de M. Budan nous montre sur-le-champ que les deux racines dont nous cherchons les limites ne peuvent être situées qu'entre 2 et 3 ou bien entre 6 et 7. Pour savoir lequel des deux cas a lieu, rendons 10 fois plus grandes les racines des deux transformées en $x-2$ et en $x-6$, et cherchons ensuite les transformées de ces équations ainsi modifiées; nous aurons ainsi les deux tableaux que voici :

	$(10x-60)\ldots2\ldots+R$,
$(10x-20)\ldots0\ldots+R$,	$(10x-61)\ldots2\ldots+R$;
$(10x-21)\ldots0\ldots+R$,	$(10x-62)\ldots2\ldots+R$;
$(10x-22)\ldots1\ldots-R$,	$(10x-63)\ldots2\ldots+R$,
$(10x-23)\ldots1\ldots-R$;	$(10x-64)\ldots2\ldots+R$;
$(10x-24)\ldots1\ldots-R$,	$(10x-65)\ldots2\ldots+R$;
$(10x-25)\ldots1\ldots-R$;	$(10x-66)\ldots2\ldots+R$,
$(10x-26)\ldots1\ldots-R$,	$(10x-67)\ldots2\ldots+R$,
$(10x-27)\ldots2\ldots+R$;	$(10x-68)\ldots2\ldots+R$,
	$(10x-69)\ldots4\ldots+R$:

L'inspection du premier de ces deux derniers tableaux nous montre que c'est entre 2 et 3 que sont comprises les deux racines réelles dont il s'agit, et nous apprend de plus que l'une d'elles est comprise entre 2,1 et 2,2 et l'autre entre 2,6 et 2,7; nous avons donc deux limites distinctes pour chacune d'elles; et notre but se trouve ainsi rempli.

Ici, comme l'on voit, le calcul du second tableau était superflu; mais on conçoit que, dans certains cas, les deux tableaux peuvent, comme celui que nous avions calculé en premier lieu, laisser encore les deux racines cherchées entre deux transformées consécutives de

l'un ou de l'autre, sans qu'on sache auquel de ces deux tableaux elles doivent appartenir. Dans ce cas, il faudra, dans chaque tableau, rendre de nouveau les racines de la première des deux transformées 10 fois plus grandes et chercher ensuite leurs transformées consécutives, ce qui donnera naissance à deux nouveaux tableaux; et, en continuant ainsi, on arrivera nécessairement au but, quelle que puisse être d'ailleurs la petitesse de la différence entre les deux racines dont il s'agit.

Appliquons encore ce procédé à l'équation du second exemple, nous aurons d'abord le premier tableau

$(x)\ldots\ldots\ 0 \ldots\ldots +R,$

$(x-1)\ldots\ldots\ 4 \ldots\ldots +R;$

qui nous montre de suite que les deux racines dont nous cherchons les limites sont entre o et 1. Rendant 10 fois plus grandes les racines de l'équation en x, et cherchant les transformées consécutives, nous aurons ce second tableau

$(10x)\ldots\ldots\ 0 \ldots\ldots +R,$

$(10x-1)\ldots\ldots\ 2 \ldots\ldots +R,$

$(10x-2)\ldots\ldots\ 4 \ldots\ldots +R,$

qui nous apprend que nos deux racines sont situées soit entre o, o et o, 1, soit entre o, 1 et o, 2. Nous voilà donc retombé dans le même cas que dans l'exemple précédent, ce qui rendra nécessaire le calcul des deux tableaux que voici :

(100x)

$(100x\quad)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 1)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 2)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 3)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 4)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 5)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 6)\ldots\ldots 0\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 7)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 8)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R,$

$(100x-\ 9)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R,$

$(100x-10)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R,$

$(100x-10)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R;$

$(100x-11)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R;$

$(100x-12)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R;$

$(100x-13)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R;$

$(100x-14)\ldots\ldots 2\ldots\ldots +R;$

$(100x-15)\ldots\ldots 3\ldots\ldots -R;$

$(100x-16)\ldots\ldots 3\ldots\ldots -R;$

$(100x-17)\ldots\ldots 4\ldots\ldots +R;$

L'inspection du dernier de ces deux tableaux montre que l'une de nos deux racines est entre 1,4 et 1,5, et l'autre entre 1,6 et 1,7.

IV. Soit l'équation de degré quelconque

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots+Px+Q=0; \qquad (X=0)$$

et sa dérivée

$$mAx^{m-1}+(m-1)Bx^{m-2}+\ldots\ldots+P=0\ ; \qquad (X'=0)$$

on sait que les racines de cette dernière sont les abscisses des sommets de la courbe parabolique

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots+Px+Q=y\ ; \qquad (X=y)$$

et qu'en éliminant x entre l'un et l'autre, l'équation résultante

$$ay^{n-1}+by^{n-2}+\ldots\ldots+py+q=0\ ; \qquad (Y=0)$$

aura pour ses racines les ordonnées des mêmes sommets, d'où il suit que cette dernière équation aura précisément autant de racines réelles et autant de racines imaginaires que la dérivée de la proposée.

En éliminant x entre les deux équations $X'=0$ et $X=y$, avant de parvenir à l'équation finale $Y=0$, on obtiendra une équation où x ne sera plus qu'au premier degré, et de laquelle, conséquemment, il sera facile de déduire les valeurs de x de celles de y.

V. Enfin si l'on connaît des limites assez approchées des coordonnées de chacun des sommets d'une courbe parabolique

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots\ldots+Px+Q=y\ ,$$

pour qu'il ne puisse y avoir lieu à aucune méprise sur la manière dont ces sommets se succèdent consécutivement les uns aux autres, tant au-dessus qu'au-dessous de l'axe des x qu'à droite et à gauche de l'axe des y; et si l'on sait de plus si la courbe coupe l'axe des y au-dessus ou au-dessous de l'origine; ce qui est toujours indiqué par le signe de Q; à l'aide des remarques (I, II), on prendra une idée suffisante de tout le cours de la courbe pour pouvoir déterminer le nombre de ses racines réelles et le signe de chacune d'elles.

A l'aide de toutes ces remarques, on pourra toujours assigner exactement le nombre et les signes des racines réelles de toute équation proposée ; ainsi qu'on va s'en convaincre par les exemples suivans ; dans lesquels nous supposerons constamment la proposée délivrée de son second terme et de ses racines égales ; ce qui est permis.

Exemple I. Soit la proposée du second degré

$$5x^2-3=0\,, \qquad (X=0)$$

dont la dérivée est

$$x=0\,; \qquad (X'=0)$$

en éliminant x entre cette dérivée et l'équation

$$5x^2-3=y\,, \qquad (X=y)$$

on parviendra à l'équation aux sommets

$$y+3=0\,. \qquad (Y=0)$$

La courbe parabolique $(X=y)$ n'a donc ici qu'un seul sommet, situé sur l'axe des y, à une distance -3 de l'origine ; puis donc que (I) ses deux branches doivent s'étendre à l'infini, du côté des y positives, dans les deux régions des x positifs et des x négatifs ; il est clair que cette courbe coupera l'axe des x de part et d'autre de l'origine. Nous parvenons donc ainsi, sans résoudre l'équation $5x^2-3=0$, à découvrir que cette équation a deux racines réelles de signes contraires ; et il en serait exactement de même pour toute autre équation du même degré.

Exemple II. Soit la proposée du troisième degré

$$10x^3-18x+7=0\,, \qquad (X=0)$$

dont la dérivée est

$$5x^2-3=0\ ; \qquad (X'=0)$$

en éliminant x entre cette dérivée et l'équation

$$10x^3-18x+7=y\ , \qquad (X=y)$$

on aura d'abord l'équation du premier degré en x

$$12x+y-7=0\ ;$$

et l'équation aux sommets sera

$$5y^2-70y-187=0\ . \qquad (Y=0)$$

Cette dernière doit (IV) avoir le même nombre de racines réelles que $(X'=0)$; et nous savons déjà (*Exemp. I*) que celle-ci en a deux; donc l'autre en aura deux aussi; et par conséquent (III), on peut assigner la limite inférieure de chacune d'elles (*). On trouve pour l'une et l'autre limites $+16$ et -3 qui, substituées pour y dans l'équation en x, donnent à peu près $-0\ ,\ 75$, $+0\ ,\ 83$. Ainsi, aux deux sommets de la courbe parabolique $(X=y)$, on a, à peu près,

$$\left\{\begin{array}{l} x=-0\ ,\ 75\ , \\ y=+16\ ,\ 00\ ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=+0\ ,\ 83\ , \\ y=-3\ ,\ 00\ ; \end{array}\right.$$

on a de plus pour $x=0$, $y=+7$; d'où l'on voit que la courbe parabolique a l'un de ses sommets dans l'angle des x négatifs et des y positifs, et l'autre dans l'angle des x positifs et des y négatifs; et que l'arc de courbe qui va de l'un à l'autre coupe l'axe des y

(*) Nous prévenons ici, une fois pour toutes, que, suivant l'usage général, lorsque deux nombres seront de signes contraires, nous considérerons constamment comme le plus grand celui des deux qui sera positif.

au-dessus de l'origine, et conséquemment l'axe des x à droite de cette même origine. Si l'on joint à cela les indications que nous avons données (II), on en pourra conclure affirmativement que la proposée a ses trois racines réelles, dont deux positives et une négative. On se conduirait absolument de la même manière pour toute autre équation du troisième degré.

Exemple III. Soit la proposée du quatrième degré

$$5x^4-18x^2+14x-7=0\,, \qquad (X=0)$$

dont la dérivée est

$$10x^3-18y+7=0\,; \qquad (X'=0)$$

en éléminant x entre cette dérivée et l'équation

$$5x^4-18x^2+14x-7=y\,, \qquad (X=y)$$

l'équation du premier degré en x sera d'abord

$$(60y+657)x+(70y+112)=0\,;$$

et l'on aura ensuite pour l'équation aux sommets

$$1200y^3+64080y^2+559368y+1302357=0\,. \qquad (Y=0)$$

Cette dernière doit avoir (IV) autant de racines réelles que l'équation $(X'=0)$; et nous savons déja (*Exemp. II*) que celle-ci en a trois; donc l'autre en aura trois aussi; et par conséquent (III) il sera possible d'assigner, en particulier, la limite inférieure de chacun d'elles. On trouvera pour les trois limites -5, -7, -43; en les substituant pour y dans l'équation en x on trouvera à peu près pour les abscisses des sommets $+0,67$, $+1,59$, $-1,51$. Ainsi, aux trois sommets de la courbe parabolique $(X=y)$, on a sensiblement

$$\begin{cases} x=+0\,,67\,, \\ y=-5\,,00\,; \end{cases} \begin{cases} x=+1\,,59\,, \\ y=-7\,,00\,; \end{cases} \begin{cases} x=-1\,,51\,, \\ y=-43\,,00\,; \end{cases}$$

on a de plus pour $x=0$, $y=-7$; d'où l'on voit que la courbe a, en allant du négatif au positif dans le sens des x, un premier sommet dans l'angle des x et y négatifs, que les deux suivans sont dans l'angle des x positifs et des y négatifs, qu'elle passe du premier au second en coupant l'axe des y au-dessous de l'origine, et conséquemment sans couper l'axe des x; en joignant donc à ces indications celles que fournit la remarque (I), on verra clairement que la proposée n'a que deux racines réelles seulement; et que ces deux racines sont de signes contraires.

Exemple IV. Soit encore la proposée du cinquième degré

$$x^5-6x^3+7x^2-7x+7=0\,, \qquad (X=0)$$

dont la dérivée est

$$5x^4-18x^2+14x-7=0\,; \qquad (X'=0)$$

en éliminant x entre cette dérivée et l'équation

$$x^5-6x^3+7x^2-7x+7=y\,, \qquad (X=y)$$

on aura d'abord l'équation du premier degré en x

$$\{(300y-1176)^2+2067\,.\,5432\}x\,,$$

$$+\{(300y-1176)(525y-2667)+2067(1780y-10696)\}=0\,;$$

et ensuite pour l'équation aux sommets

$$\left.\begin{array}{l} 1125y^4-59283y^3+763629\,.\,12y^2\,, \\ -8320106\,.\,097y-9009800\,.\,64=0\,. \end{array}\right\} \quad (Y=0)$$

Cette dernière doit avoir (IV) le même nombre de racines réelles que ($X'=0$); et nous savons déjà (*Examp. III*) que celle-ci en a deux seulement; l'autre en aura donc deux aussi; et par conséquent (III) on pourra assigner la limite inférieure de chacune d'elles. On trouve pour l'une et l'autre $+40$ et -1 qui, substituées à la place de y, dans l'équation en x, donnent à peu près -25 et $+15$; de sorte que, pour les deux sommets de la courbe parabolique ($X=y$), on a sensiblement

$$\left\{\begin{array}{l} x=-25\,, \\ y=+40\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=+15\,; \\ y=-1\,; \end{array}\right.$$

Si l'on remarque de plus que la courbe coupe l'axe des y à une distance $+7$ de l'origine, on verra qu'en passant du premier sommet au second, elle doit couper l'axe des x du côté des x positifs; à quoi joignant les indications fournies par la remarque (II), on en conclura que la proposée a trois racines réelles seulement, dont deux positives et une négative.

Si présentement nous reprenons ces mêmes exemples dans un ordre rétrograde, nous verrons que chacun d'eux se ramène à celui qui le précède immédiatement, de sorte que leur ensemble présente la solution complète de la question proposée dans le dernier. On pourra donc, en se conduisant de la même manière pour tous les autres cas, parvenir à assigner le nombre des racines réelles de toute équation proposée, ainsi que le signe de chacune d'elles. Le but que nous avions en vue au commencement de cet article nous semble donc complètement atteint.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. D'UN point donné comme centre, décrire un cercle qui passe par un autre point donné ou qui touche une droite ou un cercle donné ? (3 *problèmes.*)

II. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, ayant son centre sur une droite ou sur une circonférence donnée, passe par un point donné ou bien touche une droite ou un cercle donné ? (6 *problèmes.*)

III. Décrire un cercle d'un rayon donné qui satisfasse en outre à deux de ces trois sortes de conditions de passer par des points donnés, ou bien de toucher des droites ou des cercles donnés ? (6 *problèmes.*)

IV. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite ou sur un cercle donné, satisfasse en outre à deux de ces trois sortes de conditions de passer par des points donnés ou bien de toucher des droites ou des cercles donnés ? (12 *problèmes.*) (*)

(*) Plusieurs de ces problèmes sont de première facilité ; et nous ne les avons compris dans la liste générale que pour la rendre plus complète.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Considérations sur l'action exercée par la terre sur les corps situés loin de sa surface ;

Par M. Georges Bidone, professeur à l'université royale de Turin.

La valeur de la gravité, à la surface de la terre, déduite des observations du pendule, est vraiment celle qui convient aux points où ces observations ont été faites : elle est la résultante de toutes les forces qui agissent sur le pendule au point de la surface de la terre où l'on fait l'observation. Mais cette valeur ne peut plus, à la rigueur, être employée, lorsqu'on compare l'action de cette planète sur des corps placés à sa surface avec l'action qu'elle exerce sur des corps situés au loin dans sa sphère d'activité, tels que la lune. L'action de la terre sur ces derniers corps est due à une plus grande masse que celle qui agit sur les corps placés à sa surface. Il faut donc introduire une correction dans la valeur de la gravité terrestre, lorsqu'on veut comparer entre elles les actions dont on vient de parler. Cette correction est, à la vérité, très-petite ; mais, comme elle est due à une cause qui existe réellement, et à laquelle on peut avoir égard, il importe toujours de la connaître et de ne pas la négliger. La correction dont il s'agit provient de ce qu'en supposant la terre sphérique (hypothèse que l'objet qui nous occupe permet d'adopter), tandis que la masse

de l'atmosphère terrestre n'a pas d'influence sur le mouvement du pendule, observé à la surface de la terre, cette masse agit néanmoins sur des corps placés hors de ses limites.

On voit par là qu'il faut distinguer dans la terre deux masses distinctes; l'une est celle de son noyau, à la surface duquel se font les observations du pendule; l'autre est celle de l'atmosphère qui enveloppe ce noyau et dont l'action, jointe à celle du noyau, s'exerce sur les corps situés au-delà de cette même atmosphère.

Soient M la masse du noyau, R son rayon moyen, et Δ sa densité; on aura $M = \frac{4}{3}\pi\Delta R^3$; π étant le rapport de la circonférence au diamètre. Pareillement, soit m la masse de l'atmosphère, et r la hauteur verticale d'une colonne de matière de même densité que le noyau, équivalente à la pression de l'atmosphère; on aura

$$M + m = \frac{4}{3}\pi\Delta(R + r)^3;$$

divisant cette équation par la précédente, il viendra

$$1 + \frac{m}{M} = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^3;$$

développant le second membre, supprimant l'unité de part et d'autre et négligeant les puissances de $\frac{r}{R}$ supérieures à la première, il viendra

$$\frac{m}{M} = 3\frac{r}{R}.$$

Pour avoir la valeur numérique de ce rapport, il faut connaître r, et par conséquent la densité moyenne Δ du noyau. La densité moyenne de l'atmosphère est donnée par la hauteur de la colonne barométrique; et l'on connaît la densité du mercure par rapport à celle de l'eau. Les observations du pendule ont donné $\Delta = 4,5$; et Cavendish a trouvé, par ses expériences, $\Delta = 5,5$, la densité

de l'eau étant supposée égale à l'unité. En prenant donc $0^m,76$ pour la hauteur moyenne du mercure dans le baromètre, 13, 59 pour la densité du mercure et $R=6366198^m$; la première valeur de Δ donne

$$r=0^m,76.\frac{13,59}{4,5}=2^m,30\,,\quad \text{d'où}\quad m=0,00000108M,$$

et la seconde

$$r=0^m,76.\frac{13,59}{5,5}=1^m,88\,,\quad \text{d'où}\quad m=0,00000089M\,;$$

En prenant donc pour valeur moyenne

$$m=0,000001M\,,$$

on aura

$$M+m=1,000001M\,.$$

Si présentement on suppose que, le rayon R restant le même, la masse M devienne $M+m=(1+\alpha)M$ (en faisant $\alpha=0,000001$); la gravité g deviendra $g'=(1+\alpha)g$; et, puisqu'on a aux latitudes moyennes,

$$g=9^m,8087592\,,$$

on aura

$$g'=9^m,8088050\,.$$

Ainsi g' est la valeur qu'il faut employer, lorsqu'on veut comparer l'action de la terre sur les corps placés à sa surface avec l'action qu'elle exerce sur les corps situés au-delà de son atmosphère; ou bien, on peut conserver pour l'action de la terre sur les corps placés à sa surface la valeur originaire de g, due à la masse M; pourvu qu'on introduise dans l'expression de l'action de la même planète, sur les corps situés au-delà de son atmosphère, la masse $M+m$, au lieu de la simple masse M.

La remarque que l'on vient de faire, sur la gravité à la surface de la terre, doit être appliquée, en sens inverse, à la gravité à la surface des autres planètes. En nommant M la masse du noyau solide de la planète, R son rayon et m la masse de l'atmosphère dont ce noyau peut être recouvert, les quantités R, $M+m$ sont données par l'observation et par le calcul. Des valeurs de ces quantités on a déduit celle de g à la surface de la planète, en supposant visiblement que le rayon de la masse $M+m$ soit R. Or, dans l'hypothèse de la planète sphérique, on voit que la valeur de g à la surface n'est due qu'à la masse M dont le rayon est R.

On peut observer enfin que, si l'on connaissait la gravité g à la surface de la terre, et la gravité à la hauteur α au-dessus de la même surface, en nommant M la masse du noyau de la terre, supposée sphérique et dont le rayon est R, et m la masse de la couche sphérique d'air dont l'épaisseur est α, on aurait

$$g : g' :: \frac{M}{R^2} : \frac{M+m}{(R+\alpha)^2};$$

ce qui donne

$$M = \frac{gR^2m}{g'(R+\alpha)^2 - gR^2}.$$

Or, soit maintenant Δ la densité moyenne de la masse M, et δ la densité moyenne de l'air, pour la couche dont l'épaisseur est α (δ étant donné par l'observation du baromètre à la surface du noyau et à la hauteur α); on aura

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\Delta R^3; \qquad m = 4\pi\delta\alpha R^2;$$

d'où on tire

$$\Delta = \frac{3\delta\alpha g}{(g'-g)R + 2\alpha g};$$

équation qui donne la valeur de Δ.

Tout ce qui précède est rigoureusement vrai, dans la supposition que la figure de la terre et des planètes soit sphérique ; mais on voit que les mêmes remarques subsistent encore, à quelques petites modifications près, pour des figures très-peu différentes de la sphère.

Turin, le 12 avril 1820.

ANALISE TRANSCENDANTE.

De l'intégration approchée des équations différentielles;

Par M. le professeur Kramp, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

(*Deuxième mémoire*). (*)

1. Dans un précédent mémoire nous nous sommes occupés de l'intégration approchée de l'équation

$$y+\frac{dy}{dx}=Q,$$

dont l'intégrale rigoureuse est

$$y=e^{-x}\int e^{x}Q\mathrm{d}x\ .$$

Si l'on fait

(*) Voyez la page 317 du présent volume.

$$\int e^x Q \mathrm{d}x = A + X,$$

cette intégrale devient

$$y = Ae^{-x} + Xe^{-x};$$

désignant par q_0, q_1, q_2, q_3, ... ce que devient Q dans les suppositions particulières de $x=0$, 1, 2, 3, ..., nous avons vu que l'intégrale de cette équation, où la quantité y pourrait être représentée par une expression de cette forme

$$y = Aq_0 + Bq_1 + Cq_2 + Dq_3 + \ldots\ldots;$$

et qu'on avait alors, pour le diviseur

Deux ; $2y = q_0 + q_2$;

Trois ; $6y = 2q_0 - 3q_1 + 6q_2 + q_3$;

Quatre ; $6y = q_0 - 2q_1 + 3q_2 + 2q_3 + 2q_4$;

Cinq ; $60y = 7q_0 - 25q_1 + 50q_2 - 40q_3 + 55q_4 + 13q_5$;

Six ; $360y = 19q_0 - 72q_1 + 135q_2 - 80q_3 + 45q_4 + 216q_5 + 97q_6$;

Sept ; $5040y = 216q_0 - 1246q_1 + 3528q_2 - 5670q_3 + 6440q_4 - 3906q_5$
$+ 4536q_6 + 1142q_7$

Huit ; $40320y = 600q_0 - 3072q_1 + 6832q_2 - 5376q_3 - 3360q_4 + 17920q_5$
$- 14448q_6 + 31488q_7 + 9736q_8$;

Neuf ; $15120y = 260q_0 - 2115q_1 + 8218q_2 - 19278q_3 + 30744q_4 - 34030q_5$
$+ 28560q_6 - 14778q_7 + 14148q_8 + 3391q_9$;

et ainsi de suite. Ces résultats ne sont pas seulement approximatifs ; mais ils sont exacts, à la rigueur, toutes les fois que la fonction Q est une puissance de x à exposant *entier et positif* ; ce qui rend la quantité $e^x Q dx$ intégrable par elle-même. Si cette condition n'est pas remplie, les résultats que nous venons de donner ne seront qu'approximatifs, mais de manière qu'en se servant seulement du diviseur *six* on aura du moins, dans les cas ordinaires, l'intégrale jusqu'à *cinq* décimales au moins ; et qu'avec le diviseur *neuf* on pourra aller jusqu'à *douze*.

2. On rend cette équation un peu plus générale en affectant $\frac{dy}{dx}$ du facteur constant n ; elle devient alors

$$y+n\frac{dy}{dx}=Q.$$

Nous avons déjà remarqué qu'elle se réduit facilement à la première, par la simple supposition $x=nx'$, qui donne

$$y+\frac{dy}{dx'}=Q' ;$$

Q' étant une fonction de x', plus ou moins différente de la première. Ce procédé fort simple est en effet plus que suffisant dans toutes les intégrations particulières des équations de la forme

$$y+n\frac{dy}{dx}=Q,$$

dans lesquelles Q est une fonction de x ; mais on serait forcé de le reconnaître insuffisant dans les équations des ordres plus élevés, telles que

$$y+A\frac{dy}{dx}+B\frac{d^2y}{dx^2}=Q,$$

$$y+A\frac{dy}{dx}+B\frac{d^2y}{dx^2}+C\frac{d^3y}{dx^3}=Q,$$

et ainsi des autres. On sera donc obligé, dans tous les cas, d'avoir des solutions qui donnent immédiatement en A, B, C,...... la véritable valeur de l'inconnue y.

3. La solution de ce cas est plus longue, sans être beaucoup plus difficile. En posant

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots,$$

on a

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\ldots\ldots;$$

et

$$n\frac{dy}{dx}=nB+2nCx+3nDx^2+4nEx^3+\ldots\ldots$$

substituant donc dans l'équation

$$y+n\frac{dy}{dx}=Q,$$

elle deviendra

$$Q=(A+nB)+(B+2nC)x+(C+3nD)x^2+(D+4nE)x^3+\ldots\ldots$$

En désignant encore ici par q_0, q_1, q_2, q_3,..... ce que devient Q, lorsqu'on y fait successivement $x=0, 1, 2, 3,\ldots.$, et faisant

$$\Delta q=q_1-q_0,$$

$$2\Delta^2 q=q_2-2q_1+q_0,$$

$$6\Delta^3 q=q_3-3q_2+3q_1-q_0,$$

$$24\Delta^4 q=q_4-4q_3+6q_2-4q_1+q_0;$$

. . . .

on

on aura les differences consécutives Δq, $2\Delta^2 q$, $6\Delta^3 q$, ... de la manière qui suit :

$$q=A+nB\ ,$$

$$\Delta q=B+(1+2n)C+(1+3n)D+(1+4n)E+(1+5n)F+(1+6n)G+\dots\ ;$$

$$\Delta^2 q=C+(3+3n)D+(7+12n)E+(15+35n)F+(31+90n)G+\dots\ ;$$

$$\Delta^3 q=D+(6+4n)E+(25+30n)F+(90+150n)G+\dots\ ,$$

$$\Delta^4 q=E+(10+5n)F+(65+60n)G+\dots\ ,$$

$$\Delta^5 q=F+(15+6n)G+\dots\ ,$$

$$\Delta^6 q=G+\dots\ ,$$

. . . .

On regardera les quantités q, Δq, $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, ... comme données et les coefficiens A, B, C, D, ... comme les inconnues du problème. Il sera donc facile de trouver celles-ci, en commençant par la *dernière*, pour laquelle j'ai pris le *douzième* coefficient, désigné par la lettre N. De celle-ci on remontera à M ; de M on ira jusqu'à L, et ainsi de suite. On aura ainsi les valeurs des *douze* premiers coefficiens A, B, C, ... N, ainsi qu'il suit :

1.° *Coefficient* A.

$$\begin{aligned}A=q&-n\Delta q+n(1+2n)\Delta^2 q-n(2+6n+6n^2)\Delta^3 q\\&+n(6+22n+36n^2+24n^3)\Delta^4 q\\&-n(24+100n+210n^2+240n^3+120n^4)\Delta^5 q\\&+n(120+548n+1350n^2+2040n^3+1800n^4+720n^5)\Delta^6 q\end{aligned}$$

$$-n(720+3528n+9744n^2+17640n^3+21000n^4$$
$$+15120n^5+5040n^6)\Delta^7 q$$
$$+n(5040+26136n+78792n^2+162456n^3+235200n^4$$
$$+231840n^5+741120n^6+40320n^7)\Delta^8 q$$
$$-n(40320+219168n+708744n^2+1614816n^3$$
$$+2693880n^4+3265920n^5+2731840n^6$$
$$+1451520n^7+362880n^8)\Delta^9 q$$
$$+n(362880+2053152n+7036200n^2+17368320n^3$$
$$+32519000n^4+45554560n^5+47628000n^6$$
$$+35078400n^7+16329600n^8+3628800n^9)\Delta^{10} q$$
$$-n(3628800+21257280n+76521456n^2+201828000n^3$$
$$+410031600n^4+649479600n^5+795175920n^6$$
$$+731808000n^7+479001600n^8+199584000n^9$$
$$+39916800n^{10})\Delta^{11} q$$
$$+n(39916800+241087680n+905507856n^2$$
$$+2526193824n^3+5519487600n^4+9604465200n^5$$
$$+13293292320n^6+14411295360n^7+11855289600n^8$$
$$+6985440000n^9+2634508800n^{10}+479001600n^{11})\Delta^{12} q.$$

2.° Coefficient B.

$$B=\Delta q-(1+2n)\Delta^2 q+(2+6n+6)\Delta^3 q-(6+22n+36n^2+24n^3)\Delta^4 q$$

$$+(24+100n+210n^2+240n^3+120n^4)\Delta^5 q$$

$$-(120+548n+1350n^2+2040n^3+1800n^4+720n^5)\Delta^6 q$$

$$+(720+3528n+9744n^2+17640n^3+21000n^4+15220n^5+5040n^6)\Delta^7 q$$

$$-(5040+26136n+78792n^2+162456n^3+2325200n^3$$

$$+231840n^5+141120n^6+40320n^7)\Delta^8 q$$

$$+(40320+219168n+708744n^2+1614816n^3+2693880n^4$$

$$+3265920n^5+2751840n^6+1451520n^7+362880n^8)\Delta^9 q$$

$$-(362880+2053152n+7036200n^2+17368320n^3+32319000n^4$$

$$+45556560n^5+47628000n^6+35078400n^7$$

$$+16329600n^8+3628800n^9)\Delta^{10} q$$

$$+(3628800+21257280n+76521456n^2+201828000n^3$$

$$+410031600n^4+649479600n^5+795175920n^6$$

$$+731808000n^7+479001600n^8+199584000n^9$$

$$+39916800n^{10})\Delta^{11} q\ .$$

$$-(39916800+241087680n+905507856n^2+2526193824n^3$$

$$+5519487600n^4+9604465200n^5+13293292320n^6$$

$$+14411295360n^7+11855289600n^8+6985440000n^9$$

$$+2634508800n^{10}+479001600n^{11})\Delta^{12} q\ .$$

3.° *Coefficient C.*

$$C=\Delta^2q-(3+3n)\Delta^3q+(11+18n+12n^2)\Delta^4q-(50+105n+120n^2+60n^3)\Delta^5q$$
$$+(274+675n+1020n^2+900n^3+360n^4)\Delta^6q$$
$$-(1764+4872n+8820n^2+10500n^3+7560n^4+2520n^5)\Delta^7q$$
$$+(13068+39396n+81228n^2+117600n^3+115920n^4$$
$$+70560n^5+80160n^6)\Delta^8q$$
$$-(109584+354372n+807408n^2+1396940n^3$$
$$+1632960n^4+1375920n^5+725760n^6+181440n^7)\Delta^9q$$
$$+(1026576+3518100n+8684160n^2+16159500n^3$$
$$+22778280n^4+23814000n^5+17539200n^6$$
$$+8164800n^7+1814400n^8)\Delta^{10}q$$
$$-(10628640+38260728n+100914000n^2+205015800n^3$$
$$+324739800n^4+397587960n^5+365904000n^6$$
$$+239500800n^7+99792000n^8+19958400n^9)\Delta^{11}q$$
$$+(120543840+452753928n+1263096912n^2$$
$$+2759748800n^3+4802232600n^4+6646646160n^5$$
$$+7205647680n^6+5927644800n^7+3492720000n^8$$
$$+1317254400n^9+239500800n^{10})\Delta^{12}q\ .$$

4.°

4.° *Coefficient* D.

$$D=\Delta^3 q-(6+4n)\Delta^4 q+(35+40n+20n^2)\Delta^5-(225+340n+300n^2+120n^3)\Delta^6 q$$
$$+(1624+2940n+3500n^2+2520n^3+840n^4)\Delta^7 q$$
$$-(13132+27076n+39200n^2+38640n^3+23520n^4+6720n^5)\Delta^8 q$$
$$+(118124+269136n+448980n^2+544320n^3+458640n^4$$
$$+241920n^5+60480n^6)\Delta^9 q$$
$$-(1172700+2894720n+5386500n^2+7592760n^3$$
$$+7938000n^4+5846400n^5+2721600n^6+604800n^7)\Delta^{10} q$$
$$+(12753576+33638000n+68338640n^2+108246600n^3$$
$$+132529320n^4+121968000n^5+79833600n^6$$
$$+33264000n^7+6652800n^8)\Delta^{11} q$$
$$-(150917976+421032304n+919914600n^2$$
$$+1600744200n^3+2215548720n^4$$
$$+2401882560n^5+1975881600n^6$$
$$+1164240000n^7+439084800n^8$$
$$+79833600n^9)\Delta^{12} q\ .$$

5.° *Coefficient* E.

$$E=\Delta^4 q-(10+5n)\Delta^5 q+(86+75n+30n^2)\Delta^6 q$$
$$-(735+875n+630n^2+210n^3)\Delta^7 q$$
$$+(6769+9800n+9660n^2+5880n^3+1680n^4)\Delta^8 q$$
$$-(67284+112245n+136080n^2+114660n^3+60480n^4$$
$$+13720n^5)\Delta^9 q$$

$$+(723680+1346625n+1898190n^2+1984500n^3$$
$$+1461600n^4+680400n^5+151200n^6)\Delta^{10}q$$
$$-(8409500+17084650n+27061650n^2+33132330n^3$$
$$+30492000n^4+19958400n^5+8316000n^6$$
$$+1663200n^7)\Delta^{11}q$$
$$+(105258076+229978650n+400186050n^2+553887180n^3$$
$$+600470640n^4+493970400n^5+291060000n^6$$
$$+109771200n^7+19958400n^8)\Delta^{12}q\ .$$

6.° *Coefficient.* F.

$$F=\Delta^5 q-(15+6n)\Delta^6 q+(175+126n+42n^2)\Delta^7 q$$
$$-(1960+1932n+1176n^2+336n^3+)\Delta^8 q$$
$$+(22449+27216n+22932n^2+12096n^3+3024n^4)\Delta^9 q$$
$$-(269325+379638n+396900n^2+292320n^3$$
$$+136080n^4+30240n^5)\Delta^{10}q$$
$$+(3416930+5412330n+6626466n^2+6098400n^3$$
$$+3991680n^4+1663200n^5+332640n^6)\Delta^{11}q$$
$$-(45995730+80037210n+110777436n^2+120094128n^3$$
$$+98794080n^4+58212000n^5+21954240n^6$$
$$+3991680n^7)\Delta^{12}q\ .$$

7.° *Coefficient* G.

$$G=\Delta^6 q-(21+7n)\Delta^7 q+(322+169n+56n^2)\Delta^8 q$$
$$-(4536+3822n+2016n^2+504n^3)\Delta^9 q$$
$$+(63273+16150n+48720n^2+22680n^3+5040n^4)\Delta^{10} q$$
$$-(902055+1104411n+1016400n^2+665280n^3+277200n^4$$
$$+55440n^5)\Delta^{11} q$$
$$+(13339535+18462906n+20015688n^2+16465680n^3$$
$$+9702000n^4+3659040n^5+665280n^6)\Delta^{12} q\ .$$

8.° *Coefficient* H.

$$H=\Delta^7 q-(28+8n)\Delta^8 q+(546+288n+72n^2)\Delta^9 q$$
$$-(9450+6960n+3240n^2+720n^3)\Delta^{10} q$$
$$+(157773+145200n+95040n^2+39600n^3+7920n^4)\Delta^{11} q$$
$$-(2637558+2859384n+2352241n^2+1386000n^3$$
$$+322720n^4+95040n^5)\Delta^{12} q\ .$$

9.° *Coefficient* I.

$$I=\Delta^8 q-(36+9n)\Delta^9 q+(870+405n+90n^2)\Delta^{10} q$$
$$-(18150+11880n+4950n^2+990n^3)\Delta^{11} q$$
$$+(357423+294030n+173250n^2+65340n^3+11880n^4)\Delta^{12} q\ ;$$

10.° *Coefficient* K.

$$K=\Delta^9 q-(45+10n)\Delta^{10} q+(1320+550n+110n^2)\Delta^{11} q$$
$$+(32670+19250n+7260n^2+1320n^3)\Delta^{12} q\ .$$

11.° *Coefficient* L.

$$L=\Delta^{10}q-(55+11n)\Delta^{11}q+(1925+726n+132n^2)\Delta^{12}q\ ;$$

12.° *Coefficient* M.

$$M=\Delta^{11}q-(66+12n)\Delta^{12}q\ .$$

13.° *Coefficient* N.

$$N=\Delta^{12}q\ .$$

4. Les valeurs des coefficiens de cette longue série de résultats se présentent très-facilement, pour peu qu'on ait sous les yeux la table de ceux des *facultés numériques*, telle que je l'ai donnée dans mon *Analise des réfractions*, et dont je vais donner une copie, continuée jusqu'à *douze*. La voici :

I.	1						
II.	1	1					
III.	1	3	2				
IV.	1	6	11	6			
V.	1	10	35	50	24		
VI.	1	15	85	225	274	120	
VII.	1	21	175	735	1624	1764	720
VIII.	1	28	322	1960	6769	13132	13068
IX.	1	36	546	4536	22449	67284	118124
X.	1	45	870	9450	63273	269325	723580
XI.	1	55	1320	18150	157773	902035	3416930
XII.	1	66	1925	32670	357423	2637558	13339535

VIII.

VIII.	5040				
IX.	109584	40320			
X.	1172700	1026576	362880		
XI.	8409500	12753576	10628640	3628800	
XII.	45995730	105258076	150917976	120543840	39916800 :

5. Supposons à présent qu'on demande la partie de la série qui fait connaître le *quatrième coefficient*, ou D. Cette série commence par la *troisième différence* de q, ou par $\Delta^3 q$, qui est multipliée par l'*unité seule*.

Le *second terme* sera la différence plus élevée d'une unité, ou bien $\Delta^4 q$. Pour trouver les nombres qui multiplient cette *quatrième différence*, on prendra ceux de la *quatrième faculté*, ou de 4!, à commencer par le *troisième terme* de cette faculté; on aura 6,1; on les multipliera, le *premier*, par 1, le *second*, par 4; on aura les produits 6.1, 1.4; il en résultera $6+4n$; c'est le coefficient de $\Delta^4 q$.

Le troisième terme sera $\Delta^5 q$, multiplié par une *fonction trinome* de n. Pour trouver les coefficiens de cette fonction, prenez, dans la faculté suivante, ou dans 5!, les termes, à commencer depuis le troisième; c'est-à-dire, 35, 10, 1; multipliez ces trois termes, le premier par 1, le second par 4, et le troisième par $4\times5=20$; vous aurez 35.1, 10.4, 1.20; c'est-à-dire, 35, 40, 20; il en résultera $35+40n+20n^2$; c'est le coefficient de $\Delta^5 q$.

Le *quatrième* sera $\Delta^6 q$, multiplié par une *fonction quadrinome* de n. Prenez, dans la faculté suivante, ou dans 6!, les termes à commencer depuis le *quatrième*, savoir; 225, 85, 15, 1; multipliez ces quatre nombres, le *premier*, par 1, le *second*, par 4, le *troisième*, par $4.5=20$, et le *quatrième*, par $4.5.6=120$; vous aurez les produits 225.1, 85.4, 15.20, 1.120; c'est-à-dire, 225, 340,

300, 120; il en résultera le *quadrinome* $225+340n+300n^2+120n^3$ c'est le coefficient de $\Delta^6 q$.

Le *cinquième* sera $\Delta^7 q$, multiplié par une fonction *pentanome* de n. Prenez, dans la faculté suivante, ou dans $7!$, les termes à commencer depuis le *cinquième*, savoir ; 1624, 735, 175, 21, 1 ; multipliez ces cinq nombres, le *premier*, par 1, le *second*, par 4, le *troisième*, par $4.5=20$, le *quatrième*, par $4.5.6=120$, le *cinquième*, par $4.5.6.7=840$, vous aurez les produits 1624, 2940, 3500, 2520, 840. Il en résulte le polynome $1624+2940n+3500n^2+2520n^3+840n^4$: c'est le coefficient de $\Delta^7 q$.

Le *sixième* sera $\Delta^8 q$, multiplié par une fonction *hexanome* de n. Prenez, dans la faculté suivante, ou dans $8!$, les termes à commencer depuis le *sixième*, savoir ; 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1 ; multipliez-les par ceux de la progression hyper-géométrique 1, 4, 20, 120, 840, 6720 ; vous aurez pour produits les coefficiens du polynome $13132+27076n+39200n^2+38640n^3+23520n^4+6720n^5$; ce sera le coefficient de $\Delta^8 q$.

On continuera de la même manière, tant qu'on voudra, c'est-à-dire, jusqu'à la douzième faculté ; c'est là où nous avons arrêté nos calculs.

6. Quant à la progression par laquelle il faudra multiplier les nombres pris dans la table générale des facultés, il faudra remarquer que

Pour A c'est la série hyper-géométrique ordinaire, savoir ;

1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880,3628800,39916800 .

Pour B c'est la même série.

Pour C c'est cette même série, à partir du second terme et divisée par 2 ; c'est-à-dire,

1,3,12,60,360,2520,20160,181440,1814400,19958400 .

Pour D c'est cette dernière, à partir du second terme, et divisée par 3 ; c'est-à-dire,

1,4,20,120,840,6720,60480,604800,6652800 :

Pour E c'est la précédente, à partir de son second terme, et divisée par 4 ; c'est-à-dire,

1,5,30,210,1680,15120,151200,1663200 :

Pour F c'est 1,6,42,336,3024,30240,332640 .

Pour G c'est 1,7,56,504,5040,55440 ;

Pour H c'est . . 1, 8, 72, 720, 7920 ;

Pour I c'est . . . . 1, 9, 90, 990 ;

Pour K c'est . . . . . . 1, 10, 110 ;

Pour L c'est . . . . 1, 11 ;

Pour M c'est . . . . 1 ;

7. Soit $n=2$. On aura

$$y+2\frac{dy}{dx}=Q\,;$$

et la valeur intégrale et rigoureuse de y sera

$$y=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\int e^{\frac{x}{2}}Q\,dx\,;$$

dans cette même supposition, on aura

$A=q-2\Delta q+10\Delta^2 q-76\Delta^3 q+772\Delta^4 q-9808\Delta^5 q+149552\Delta^6 q-2660544\Delta^7 q$;

$B= +\Delta q-5\Delta^2 q+38\Delta^3 q-386\Delta^4 q+4904\Delta^5 q-74776\Delta^6 q+1330272\Delta^7 q$;

$C= +\Delta^2 q-9\Delta^3 q+95\Delta^4 q-1220\Delta^5 q+18664\Delta^6 q-332388\Delta^7 q$;

$D= +\Delta^3 q-14\Delta^4 q+195\Delta^5 q-3065\Delta^6 q+55104\Delta^7 q$;

$E= +\Delta^4 q-20\Delta^5 q+355\Delta^6 q-6685\Delta^7 q$;

$F= +\Delta^5 q-27\Delta^6 q+595\Delta^7 q$;

$G= +\Delta^6 q-35\Delta^7 q$;

$H= +\Delta^7 q$;

d'où on conclura

$$y=q+(x-2)\Delta q+(x^2-5x+10)\Delta^2 q+(x^3-9x^2+38x-76)\Delta^3 q$$
$$+(x^4-14x^3+95x^2-386x+772)\Delta^4 q$$
$$+(x^5-20x^4+195x^3-1220x^2+4904x-9808)\Delta^5 q$$
$$+(x^6-27x^5+355x^4-3065x^3+18664x^2-74776x+149652)\Delta^6 q$$
$$+(x^7-35x^6+595x^5-6685x^4+55104x^3-332388x^2+1330272x$$
$$-2660544)\Delta^7 q+\ldots.$$

On aura ainsi

Pour $x=3$ . . . . $y=q+\Delta q+4\Delta^2 q-16\Delta^3 q$.

Pour $x=4$ . . . . $y=q+2\Delta q+6\Delta^2 q-4\Delta^3 q+108\Delta^4 q$.

Pour $x=5$ . . . . $y=q+3\Delta q+10\Delta^2 q+14\Delta^3 q+92\Delta^4 q-788\Delta^5 q$.

Pour $x=6$ . . . . $y=q+4\Delta q+16\Delta^2 q+44\Delta^3 q+148\Delta^4 q-328\Delta^5 q$
$+7644\Delta^6 q$;

Pour $x=7$ . . . . $y=q+5\Delta q+24\Delta^2 q+92\Delta^3 q+324\Delta^4 q-6588\Delta^5 q$
$-233324\Delta^6 q-79672\Delta^7 q$.

et ainsi de suite.

Et enfin en mettant pour Δq, $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, $\Delta^4 q$, ... leurs valeurs en q, q_1, q_2, q_3, ... d'après les formules connues, on aura

Pour $x=3$ ..... $3y=14q-33q_1+30q_2-8q_3$;

Pour $x=4$ ..... $6y=43q-144q_1+192q_2-112q_3+27q_4$;

Pour $x=5$ .... $120y=1303q-5680q_1+10250q_2-9340q_3+4375q_4$
$-788q_5$;

Pour $x=6$ ..... $90y=1534q-8208q_1+18675q_2-22880q_3+15930q_4$
$-5904q_5+943q_6$;

et ainsi de suite.

8. *Exemple.* Soit $Q=x^3$, l'équation sera

$$y+2\frac{dy}{dx}=x^3;$$

elle aura pour intégrale complète

$$y=Ae^{-\frac{x}{2}}+x^3-6x^2+24x-48:$$

La méthode actuelle donne $q=0$, $q_1=1$, $q_2=8$, $q_3=27$; $q_4=64$, $q_5=125$, $q_6=216$, ...

On aura donc, pour $x=3$,

$$3y=14q-33q_1+30q_2-8q_3=-33+240-216=-9;$$

donc $y=-3$.

Pour $x=4$, on aura

$$6y=-144+1536-3024+1728=+96;$$

donc $y=16$.

Pour $x=5$, on aura

$$120y=-5680+82000-252180+28000-9850=5640\ ;$$

donc $y=47$.

Pour $x=6$, on aura

$$90y=-8208+149400-617760+1019520-738000$$
$$+203688=+8640\ ;$$

donc $y=96$. Et ainsi de suite.

Or, toutes ces valeurs, tant de x que de y, sont visiblement comprises sous la loi générale

$$x^3-6x^2+24x-48\ ;$$

ainsi l'intégrale complète sera

$$y=Ae^{-\frac{x}{2}}+x^3-6x^2+24x-48\ .$$

9. La méthode est sur-tout infiniment précieuse dans les cas innombrables où la différentielle

$$2y=e^{-\frac{x}{2}}\int e^{\frac{x}{2}}Q\mathrm{d}x\ ,$$

ou, plus généralement,

$$ny=e^{-\frac{x}{n}}\int e^{\frac{x}{n}}Q\mathrm{d}x\ ,$$

n'est pas intégrable à la rigueur; parce qu'alors elle fait connaître la véritable valeur de l'inconnue ou de la variable y, avec une approximation beaucoup plus rapide que toute autre méthode connue ; ce que nous ferons voir dans le premier mémoire qui suivra celui-ci.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 133 de ce volume.

PROBLÈME. *Par un point donné dans l'intérieur d'un angle trièdre tri-rectangle, et également distant de ses trois faces, conduire un plan tellement dirigé que sa partie interceptée dans l'angle trièdre dont il s'agit soit un triangle semblable à un triangle donné ?*

Solution géométrique ;

Par M. VECTEN, licencié ès sciences.

Si nous considérons les trois côtés du triangle donné comme les diamètres de trois sphères, ces sphères se couperont en deux points, au-dessus et au-dessous du plan de ce triangle ; et il sera très-facile de déterminer la projection commune de ces deux points sur le plan du triangle, ainsi que leurs distances à cette projection.

Si l'on joint l'un quelconque de ces deux points aux trois sommets du triangle par des droites ; ces droites seront les arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle auquel le triangle donné se trouvera inscrit, et il sera facile de déterminer les longueurs de ces trois arêtes. En supposant donc que cet angle trièdre soit celui qui est donné, on lui aura inscrit le triangle donné, et il ne sera plus question

que de mener par le point donné un plan qui soit parallèle à celui de ce triangle.

Or, c'est là une opération que l'on peut exécuter facilement et rigoureusement par les procédés de la géométrie descriptive, ou par tous autres équivalens; nous pouvons donc considérer le problème comme complètement résolu.

On voit même que le problème ne serait guère plus difficile à résoudre, si le point donné, au lieu d'être également distant des trois faces de l'angle trièdre, était quelconque dans cet angle.

Ce problème n'est, au surplus, qu'un cas particulier du problème où l'on proposerait de *mener par un point donné quelconque dans un angle trièdre donné, aussi quelconque, un plan tellement dirigé que sa partie interceptée dans l'angle trièdre dont il s'agit fût un triangle semblable à un triangle donné?*

La solution de ce dernier problème ne différerait uniquement de celle de l'autre qu'en ce que, pour déterminer les longueurs des portions d'arêtes interceptées par le triangle donné, supposé inscrit dans l'angle trièdre donné, il faudrait substituer aux trois sphères trois surfaces de révolution, ayant pour axes les trois côtés de ce triangle, et pour génératrices des arcs respectivement capables des trois angles plans de l'angle trièdre. Mais il est au moins douteux qu'alors le problème pût être résolu d'une manière rigoureuse avec la règle et le compas.

Solution analitique;

Par M. Gergonne.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle donné, et A, B, C les angles respectivement opposés, dont les sommets sont supposés A, B, C.

Soit pris l'angle trièdre tri-rectangle donné pour celui des coordonnées

données positives ; supposons, pour plus de généralité, que le point donné soit quelconque dans cet angle trièdre, et que ses trois coordonnées soient α, β, γ.

Supposons encore qu'on exige que, dans le triangle cherché, les sommets homologues à A, B, C, soient respectivement sur les axes des X, Y, Z, que nous prendrons pour symboles des coordonnées courantes.

Tout se réduit évidemment à déterminer les segmens qui devront être interceptés sur les axes des X, Y, Z, à partir de l'origine par le plan cherché. Représentons respectivement ces segmens par x, y, z.

L'équation du plan cherché sera conséquemment

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1\ ;$$

et, puisque ce plan doit contenir le point donné, on aura

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=1\ ,$$

ou bien

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=xyz\ : \qquad (1)$$

Mais, puisque le triangle cherché doit être semblable au triangle donné, on devra avoir aussi

$$\left.\begin{array}{l} y^2+z^2=\lambda^2a^2\ , \\ z^2+x^2=\lambda^2b^2\ , \\ x^2+y^2=\lambda^2c^2\ ; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

λ étant un nombre inconnu, indiquant le rapport des côtés homo-

logues de ces deux triangles. Nous avons donc ainsi quatre équations entre les quatre inconnues x, y, z, λ.

En retranchant tour-à-tour chacune des équations (2) de la somme des deux autres, il viendra

$$2x^2=\lambda^2(b^2+c^2-a^2)=2\lambda^2bc\text{Cos}.A\ ,$$

$$2y^2=\lambda^2(c^2+a^2-b^2)=2\lambda^2ca\text{Cos}.B\ ,$$

$$2z^2=\lambda^2(a^2+b^2-c^2)=2\lambda^2ab\text{Cos}.C\ ;$$

d'où, en divisant par 2 et extrayant la racine quarrée des deux membres

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda\sqrt{bc\text{Cos}.A}\ , \\ y=\lambda\sqrt{ca\text{Cos}.B}\ , \\ z=\lambda\sqrt{ab\text{Cos}.C}\ ; \end{array}\right\}\ (3)$$

on aura donc

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=\lambda^2\left\{\begin{array}{l} \alpha a\sqrt{bc\text{Cos}.B\text{Cos}.C} \\ +\beta b\sqrt{ca\text{Cos}.C\text{Cos}.A} \\ +\gamma c\sqrt{ab\text{Cos}.A\text{Cos}.B} \end{array}\right\},$$

et

$$xyz=\lambda^3abc\sqrt{\text{Cos}.A\text{Cos}.B\text{Cos}.C}\ ;$$

substituant donc dans l'équation (1) et divisant par λ^2, il viendra

$$\alpha a\sqrt{bc\text{Cos}.B\text{Cos}.C}+\beta b\sqrt{ca\text{Cos}.C\text{Cos}.A}+\gamma c\sqrt{ab\text{Cos}.A\text{Cos}.B}$$

$$=\lambda abc\sqrt{\text{Cos.}A\,\text{Cos.}B\,\text{Cos.}C}\ ;$$

d'où

$$\lambda=\frac{\alpha}{\sqrt{bc\text{Cos.}A}}+\frac{\beta}{\sqrt{ca\text{Cos.}B}}+\frac{\gamma}{\sqrt{ab\text{Cos.}C}}\ ;$$

Tel est donc le rapport des côtés du triangle cherché à ceux du triangle donné.

En substituant enfin cette valeur de λ dans les équations (3), on aura

$$x=\alpha+\beta\sqrt{\frac{b\text{Cos.}A}{a\text{Cos.}C}}+\gamma\sqrt{\frac{c\text{Cos.}A}{a\text{Cos.}C}}\ ,$$

$$y=\beta+\gamma\sqrt{\frac{c\text{Cos.}B}{b\text{Cos.}C}}+\alpha\sqrt{\frac{a\text{Cos.}B}{b\text{Cos.}A}}\ ,$$

$$z=\gamma+\alpha\sqrt{\frac{a\text{Cos.}C}{c\text{Cos.}A}}+\beta\sqrt{\frac{b\text{Cos.}C}{c\text{Cos.}B}}\ .$$

Telles sont donc les valeurs des inconnues du problème.

Mais si des sommets A, B, C du triangle donné, on abaisse respectivement des perpendiculaires AA′, BB′, CC′ sur les directions des côtés opposés BC, CA, AB, on aura

$$\text{BA}'=c\text{Cos.}B\ ,\qquad \text{AB}'=c\text{Cos.}A\ ,$$

$$\text{CB}'=a\text{Cos.}C\ ,\qquad \text{BC}'=a\text{Cos.}B\ ,$$

$$\text{AC}'=b\text{Cos.}A\ ;\qquad \text{CA}'=b\text{Cos.}C\ ;$$

donc, en substituant, on aura

$$x=\alpha+\beta\sqrt{\frac{AC'}{BC'}}+\gamma\sqrt{\frac{AB'}{CB'}},$$

$$y=\beta+\gamma\sqrt{\frac{BA'}{CA'}}+\alpha\sqrt{\frac{BC'}{AC'}};$$

$$z=\gamma+\alpha\sqrt{\frac{CB'}{AB'}}+\beta\sqrt{\frac{CA'}{BA'}}.$$

Si, présentement, sur les trois côtés du triangle donné, pris successivement comme diamètres, on décrit trois demi-cercles, et qu'ou prolonge respectivement les perpendiculaires AA', BB', CC', jusqu'à la rencontre de leurs circonférences en A'', B'', C''; en menant BA'', CA'', CB'', AB'', AC'', BC'', par la propriété des cordes inscrites aux demi-cercles, on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{AC'}{BC'}&=\left(\frac{AC''}{BC''}\right)^2;\\ \frac{BA'}{CA'}&=\left(\frac{BA''}{CA''}\right)^2,\\ \frac{CB'}{AB'}&=\left(\frac{CB''}{AB''}\right)^2;\end{aligned}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{aligned}\frac{BC'}{AC'}&=\left(\frac{BC''}{AC''}\right)^2,\\ \frac{CA'}{BA'}&=\left(\frac{CA''}{BA''}\right)^2,\\ \frac{AB'}{CB'}&=\left(\frac{AB''}{CB''}\right)^2;\end{aligned}\right.$$

substituant donc, il viendra finalement

$$x=\alpha+\beta\frac{AC''}{BC''}+\gamma\frac{AB''}{CB''},$$

$$y=\beta+\gamma\frac{BA''}{CA''}+\alpha\frac{BC''}{AC''},$$

$$z = y + \alpha\frac{CB''}{AB''} + \beta\frac{CA''}{BA''}\ ;$$

valeurs extrêmement faciles à construire.

Solutions du problème d'analise indéterminée proposé à la page 244 du présent volume ;

Par MM. Frédéric Sarrus,
Vecten, licencié ès sciences.
A. Ollive, licencié ès lettres,
Et un Abonné.

PROBLÈME. Quelles sont les valeurs entières les plus générales de x *et* y *qui rendent entière la fonction* $\frac{xy}{x+y}$?

Soit δ, dit M. Sarrus, le plus grand commun diviseur de x et y, de telle sorte qu'on ait $x=p\delta$, $y=q\delta$, p et q étant deux nombres entiers premiers entre eux, on aura

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{pq\delta}{p+q}\ ;$$

p et q étant premiers entre eux, devront l'être également avec $p+q$; il sera donc nécessaire, et en même temps il suffira, pour que la fonction soit entière, que δ soit divisible par $p+q$; on devra donc avoir $\delta=(p+q)r$, r étant un nombre entier quelconque ; on aura donc ainsi, pour les valeurs cherchées de x et de y,

$$x=pr(p+q)\,, \qquad y=qr(p+q)\;;$$

au moyen de quoi on aura, en effet,

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{pqr^2(p+q)^2}{r(p+q)^2}=pqr\,,$$

nombre entier, pourvu qu'on prenne des nombres entiers pour p, q, r.

M. Vecten est exactement parvenu à la même formule ; mais nous ignorons de quelles considérations il l'a déduite.

Par les procédés ordinaires de l'analise indéterminée, M. A. Ollive est tombé sur des valeurs de la forme

$$x=2gr(g+h)\,, \qquad y=2gr(g-h)\,.$$

Ces formules rentrent exactement dans les précédentes ; en posant, en effet,

$$g+h=p\,, \qquad g-h=q\,,$$

il vient

$$2g=p+q\,,$$

ce qui donne, en substituant,

$$x=pr(p+q)\,, \qquad y=qr(p+q)\,:$$

comme ci-dessus.

Un Abonné s'est borné à considérer l'équation identique

$$pqr=\frac{pqr^2(p+q)^2}{r(p+q)^2}=\frac{pr(p+q)\times qr(p+q)}{pr(p+q)+qr(p+q)}\,,$$

en observant que si, dans le dernier membre, on remplaçait $pr(p+q)$, $qr(p+q)$ respectivement par x et y, ce dernier membre devenait $\frac{xy}{x+y}$.

M. Ollive observe que, si l'on veut rendre $\frac{xy}{x+y}$ égal à un nombre entier donné, il suffira de décomposer ce nombre entier en trois facteurs, ce qui est toujours possible, dût-on prendre deux de ces facteurs égaux à l'unité ; on prendra ensuite ces trois facteurs pour p, q, r.

Il suit de là que dans le cas même où le nombre entier donné serait un nombre premier P, le problème serait encore susceptible de deux solutions, suivant que l'on ferait r ou bien l'un des deux nombres p et q égaux à ce nombre premier P ; les valeurs de x et y seraient, dans le premier cas,

$$2P, \quad 2P ;$$

et dans le second

$$P(P+1), \quad P+1.$$

On peut, au surplus, remarquer qu'il est impossible que x et y soient tous deux impairs, puisqu'alors xy étant impair ne pourrait être divisé par $x+y$, qui serait nécessairement un nombre pair ; c'est une observation qui n'a pas échappé à M. Ollive.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analise indéterminée.

PAR combien de systèmes de valeurs de x et y peut-on rendre la fonction $\frac{xy}{x+y}$ égale au nombre entier $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$ dans lequel $a, b, c, \ldots$ sont des nombres premiers inégaux, différens de l'unité?

Problème d'analise transcendante.

On propose de démontrer la série suivante :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{4}\,\text{Tang.}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\,\text{Tang.}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\,\text{Tang.}\frac{\pi}{16}+\frac{1}{32}\,\text{Tang.}\frac{\pi}{32}+\ldots,$$

laquelle tend sans cesse à devenir une progression géométrique décroissante ayant pour raison $\frac{1}{4}$?

FIN DU DIXIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le X.e volume des Annales.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Dissertation sur un cas singulier que présente l'approximation des racines des équations numériques ; par M. *Gergonne*. 122—131.

Développement des fractions rationnelles composées en fractions élémentaires ; par M.*** 255—271.

ANALISE APPLIQUÉE.

Problème général des engrenages à axes fixes, par M. *Sarrus*. 299—315.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Sur l'approximation des racines des équations numériques ; par M. *Bérard*. 61—73.

Recherches sur la nature et les signes des racines, dans les équations numériques de tous les degrés ; par *un Abonné*. 341—356.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Extension du *Problème de Fermat*, sur les doubles égalités ; par M. *Coste*. 101—122.

Sur la recherche des nombres premiers ; par M. *Sarrus*. 184—188.

Sur une nouvelle classe de problèmes indéterminés, avec application à la décomposition des fractions ; par M. *Gergonne*. 271—281.

Solution d'un problème d'analise indéterminée ; par MM. *Sarrus*, *Vecten*, *Ollive* et *un Abonné*. 385—388.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai d'une méthode générale servant à intégrer, avec une approximation illimitée, toute équation différentielle à deux variables ; par M. *Kramp*. 1—33.

Application du calcul aux différences partielles au développement des fonctions et au retour des suites ; par M. *Sarrus*. 33—51.

Essai sur le développement en fractions continues des racines des équations du troisième degré ; par M. *Sarrus*. 189—202.

Recherches de diverses séries ; par M. *Sarrus*. 217—228.

Recherches d'analise relatives au développement des fonctions ; par M. *Sarrus*. 245—255.

Intégration par approximation de toute équation différentielle quelconque ; par M. *Kramp*. 317—341.

Deuxième mémoire sur le même sujet ; par *le même*. 361—379.

ARITHMETIQUE POLITIQUE.

Sur les élections et le système représentatif ; par M. *Gergonne*. 281—288.

CATOPTRIQUE.

Recherche des foyers des miroirs sphériques, convexes et concaves ; par M. *Gergonne*. 97—100.

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

Solution des problèmes proposés au concours général des colléges royaux de Paris, pour 1819 ; par M. *Gergonne*. 83—89.

Solution et construction géométrique du problème XXIV de l'*Arithmétique universelle* de NEWTON ; par M. *Gergonne*. 204—217.

Problème général des engrenages à axes fixes, par M. *Sarrus*. 299—315.
Solution d'un problème de géométrie; par M. *Gergonne*. 380—385.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Construction de la tangente à une courbe à double courbure quelconque; par un *Abonné*. 89—92.

GÉOMÉTRIE ELEMENTAIRE.

Solution des problèmes de mathématiques proposés au concours général des colléges royaux de Paris; par M. *Francœur*. 73—83.
Démonstration d'un théorème de géométrie; par M. *Vecten*. 202—204.
Solution d'un problème de géométrie; par M. *Vecten*. 379—380.

GÉOMÉTRIE MIXTE.

Inscription à un triangle quelconque de trois cercles tels que chacun touche les deux autres et deux côtés du triangle; par M. *Lechmütz*. 289—299.

GÉOMETRIE TRANSCENDANTE.

Construction graphique approchée du problème de la *trisection de l'angle*; par M. *Sarrus*. 189—202.
Construction graphique approchée du problème de la *duplication du cube*; par M. *Gergonne*. 242—244.

HYDRODYNAMIQUE.

Sur le principe d'hydrodynamique relatif à la force d'impulsion des fluides; par M. *Narjol*. 92—97.

OPTIQUE.

Sur le nombre et la nature des couleurs primitives; par *un Abonné*. 228—242.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Sur l'emploi de l'algorithme des fonctions, dans la démonstration des théorèmes de géométrie; par *un Abonné*. 161—184.

STATIQUE.

Démonstration de l'équilibre d'un polyèdre quelconque, sollicité par des forces appliquées aux centres de gravité de ces faces, perpendiculairement à leur direction, et proportionnelles à leur étendue; par M. *Gergonne*. 51—61.

Essai sur quelques cas particuliers d'attraction; par M. *Gergonne*. 133—160.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

Tom. IX, pag. 289	Théorème.		—
Pag. 291	Probleme.	résolu tom. X,	pag. 61—73.
Pag. 320	Problème.		—
	Théorème.		—
Pag. 344	Problème.		—
Pag. 372	Problème.		—
Pag. 398	Problème.		—
Tom. X, pag. 100	Théorème.		—
	Problème.		—
Pag. 131	V Problèmes.	un seul.	379—385.
Pag. 160	V Problèmes.		—
Pag. 188	II Théorèmes.	un seul.	217—228.
	Problème.		—
Pag. 244	II Problèmes.	un seul.	385—388.

ERRATA

Pour le dixième volume des Annales.

PAGE 29, ligne 6, — $y+\sqrt{-1}$; *lisez* : $x+\sqrt{-1}$.

Page 31, ligne 3, — $\frac{dA_m}{da_m}$; *lisez* : $\frac{dA_m}{da_n}$.

Ligne 7, — 2^a ; *lisez* : $2a$.

Page 48, ligne 4, — a_1 ; *lisez* : a_1A_1.

Ligne 5, — $2a_1$; *lisez* : $2a_1A_2$.

Ligne 6, — $3a_1$; *lisez* : $3a_1A_3$.

Ligne 8, — na_1 ; *lisez* : na_1A_n.

Page 43, ligne 3, — $n+o$; *lisez* : $n+2$.

Pag. 90, ligne 8, en remontant, — $a-r$; *lisez* : $a\pm r$.

Page 217, ligne 6, — $\mathrm{Cos.}^2x$; *lisez* : $\mathrm{Cos.}2x$.

Page 285, ligne 1, — eux-mêmes ; *lisez* : eux même.

Ligne 3, en remontant, — précis ; *lisez* : positif.

Page 348, ligne 3, — rendre de nouveau les racines de la première des deux transformées 10 fois plus grandes, et chercher, etc. : *lisez* : rendre de nouveau les racines de la transformée qui a deux permanences de plus que celle qui la suit immédiatement 10 fois plus grandes ; par exemple, dans le 2.ᵉ tableau, il faudra rendre 10 fois plus grandes les racines de l'équation en $10x-68$, et chercher, etc.

Page 349, colonne de gauche, — *supprimez les trois dernières transformées*.

Ligne 4, en remontant, — 1,4 et 1,5 ; *lisez* : 0,14 et 0,15.

Même ligne, 1,6 et 1,7 ; *lisez* : 0,16 et 0,17.

Pag. 350, ligne 13, — *ajoutez* : J'appelle cette équation, où x n'est qu'au premier degré, l'*équation aux sommets*, parce qu'elle fait connaître la position des sommets de la courbe parabolique.

Page 351, ligne 12, — aux sommets ; *lisez* : en y.

Ligne 13, — *ajoutez :* Cette équation est la même, pour ce cas particulier, que l'équation aux sommets, parce que l'on a ici $x=0$, $X'=0$.

Page 352, ligne 4, du premier degré en x ; *lisez* : aux sommets.

Ligne 6, — aux sommets ; *lisez* : en y.

Ligne 16, — *supprimez, aux deux endroits*, 00.

Page 353, ligne 13, — du premier degré en x ; *lisez* : aux sommets.

Ligne 15, — aux sommets ; *lisez* : en y.

Page 354, ligne 2, — *supprimez, aux trois endroits*, 00.

Ligne 6, en remontant, — du premier degré en x ; *lisez* : aux sommets.

Ligne 5, en remontant, à la fin, — *supprimez la virgule.*

Ligne 3, en remontant, — aux sommets ; *lisez :* en y.

Ligne 2, en remontant, — *remplacez le point par une virgule, et supprimez la virgule de la fin.*

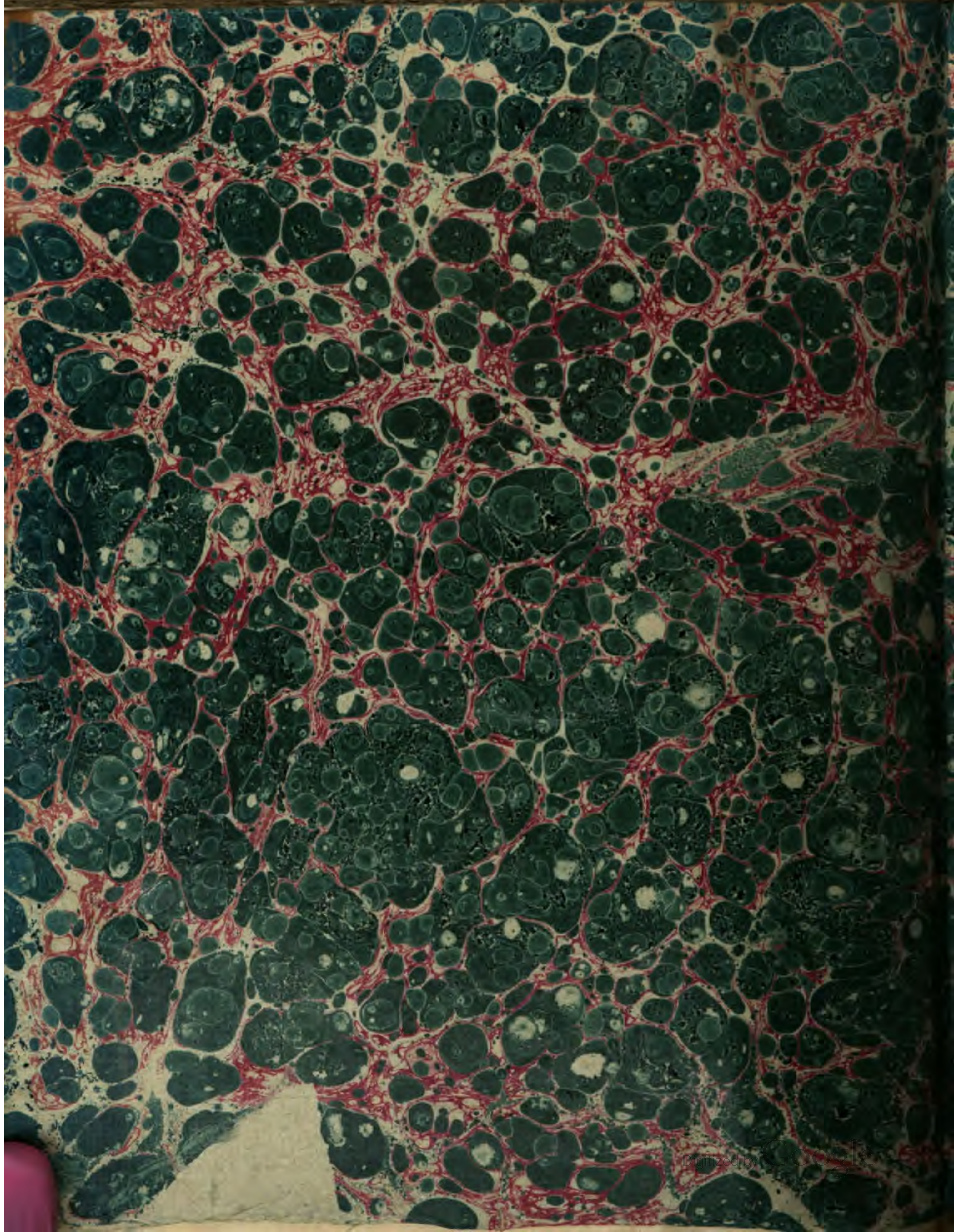
Ligne 1, en remontant, — *remplacez les deux points par des virgules.*

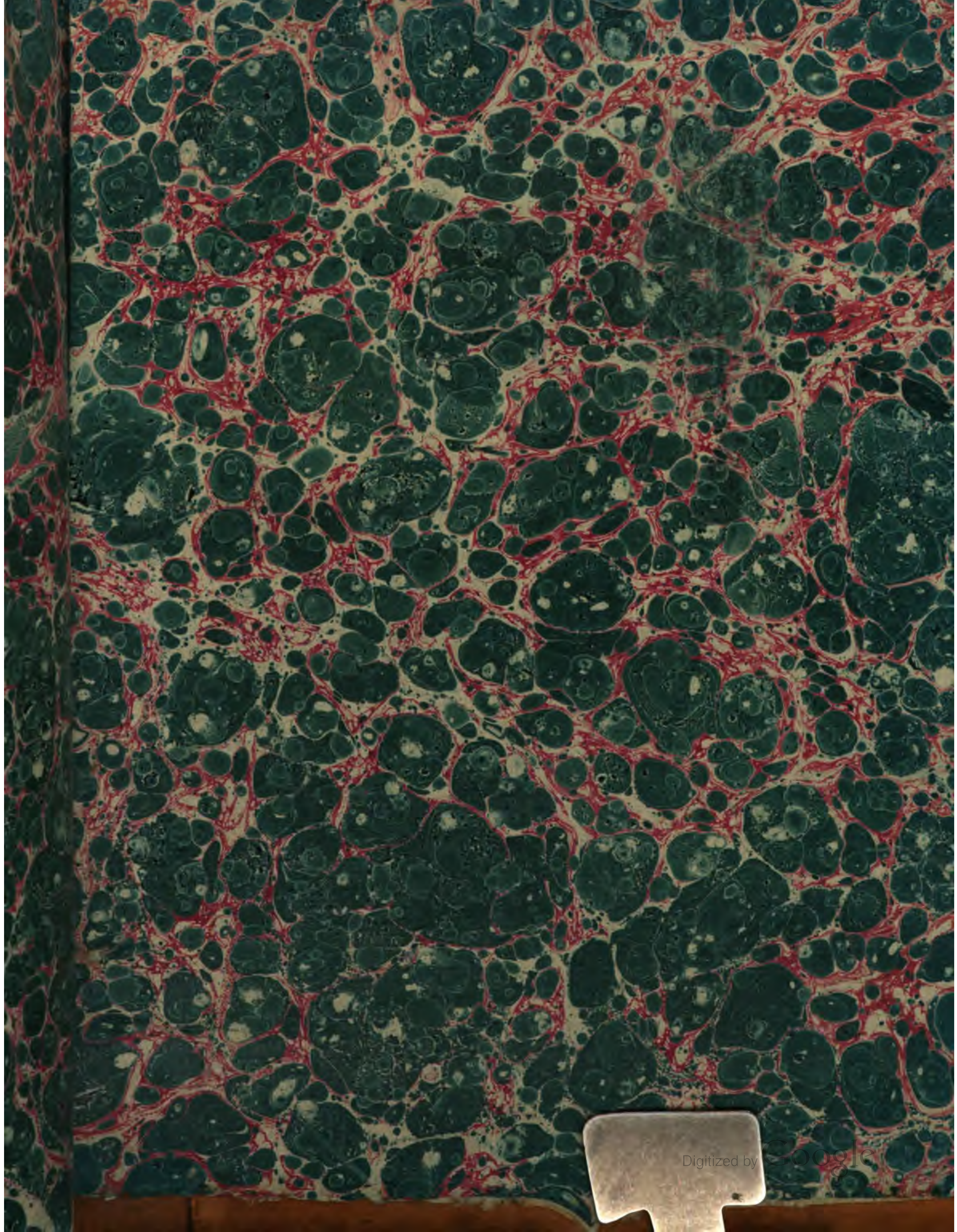
Page 355, ligne 6, — -25 ; *lisez* : $-2{,}25$.

Ligne 7, — $+15$; *lisez* : $+1{,}5$.

Ligne 9, — -25 ; *lisez* : $-2{,}25$.

Même ligne, — $+15$; *lisez* : $+1{,}5$.




Digitized by Google